**Prof. Guido Sweers**
**Jan M. Krämer**

**WS 2014/2015**

# Analysis 3
# Übungsblatt 14
# Version 2

Die Lösungen für dieses Übungsblatt müssen bis zum 28. Januar um 16 Uhr im Übungsbriefkasten im Studierendenarbeitsraum abgegeben werden.

**Aufgabe 1 (5 Punkte):** Wir betrachten $U = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$.

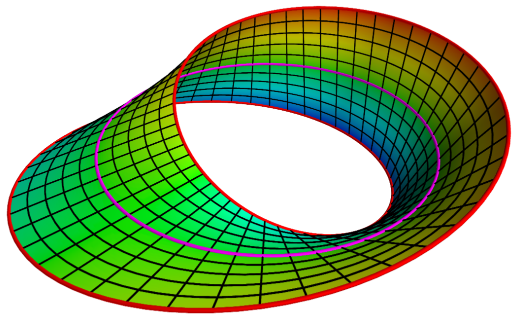
(a) Zeigen Sie, dass $\omega = xzdy \wedge dz - yzdz \wedge dx - x^2 dx \wedge dy \in \Omega_1^2(U)$ geschlossen ist.

(b) Bestimmen Sie $\eta \in \Omega_2^1(U)$, so dass $d\eta = \omega$.

**Aufgabe 2 (10 Punkte):** Sei

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} (2+u\cos(v))\cos(2v) \\ (2+u\cos(v))\sin(2v) \\ u\sin(v) \end{pmatrix} \quad \text{und } g(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten das Möbius-Band $M = f([0,1]\times[0,2\pi])$ mit dem Vektorfeld $g$.



$M$

(a) Berechnen Sie $\nabla \times g(x,y)$.

(b) Berechnen Sie damit $\int_M (\nabla \times g(x,y)) \cdot n d\sigma$.

(c) Finden Sie eine Parametrisierung von $\partial M$ und berechnen Sie den Tangentialeinheitsvektor $\tau$.

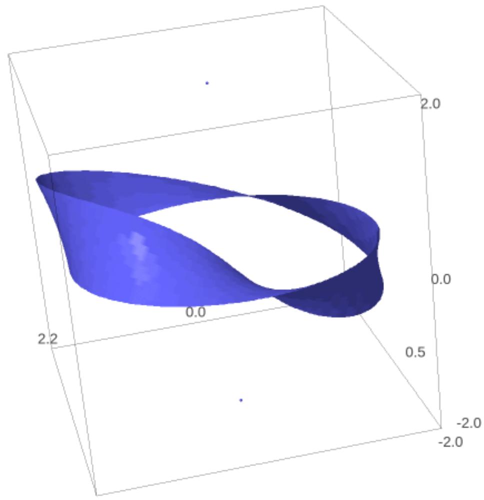
(d) Berechnen Sie $\int_{\partial M} g(x,y) \cdot \tau ds$.

(e) Widerspricht dies dem Satz von Stokes? Erklären Sie das Ergebnis.

**Aufgabe 3:** Wir ändern etwas in Aufgabe 2. Sei

$$\tilde{f}(u,v) = \begin{pmatrix} (2+u\cos(v))\cos(v) \\ (2+u\cos(v))\sin(v) \\ u\sin(v) \end{pmatrix}$$

und $\tilde{M} = \tilde{f}([0,1]\times[0,2\pi])$. Berechnen Sie




$\tilde{M}$

(a) $\int_{\tilde{M}} \nabla \times g(x,y) \cdot \boldsymbol{n} d\sigma$

(b) $\int_{\partial \tilde{M}} g(x,y) \cdot \boldsymbol{\tau} ds$

**Aufgabe 4:** Wir betrachten $\omega, \eta \in \Omega_2^2(B_1(0) \setminus \{0\})$.

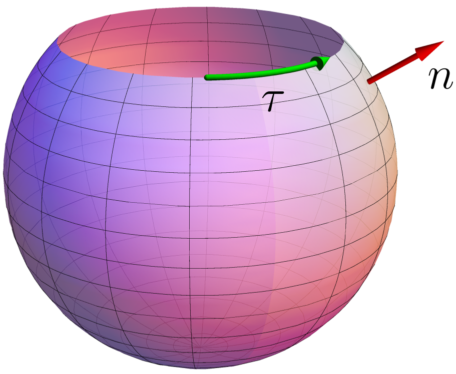
$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx \text{ und } \eta = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy.$$

(a) Untersuchen Sie, ob $\omega$ und $\eta$ geschlossen sind.

(b) Untersuchen Sie, ob $\omega$ und $\eta$ exakt sind.

**Aufgabe 5:** Sei

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + y^2 + z^2 = 2, \; z < 1\right\}$$




und $\vec{v} = (y, -x + z^2, e^z)$. Seien $\boldsymbol{\tau}$ und $\boldsymbol{n}$ wie im Bild orientiert.

(a) Berechen Sie $\displaystyle\int_M \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma$

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\partial M} \vec{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \, ds$.

(c) Erklären Sie dieses Ergebnis.

**Aufgabe 6:** Sei $\omega \in \Lambda^2((\mathbb{R}^2)^*)$ und $\eta \in \Lambda^2((\mathbb{R}^3)^*)$.

(a) Zeigen Sie, dass es $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda^1((\mathbb{R}^2)^*)$ gibt, so dass $\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2$.

(b) Zeigen Sie, dass es $\beta_1, \beta_2 \in \Lambda^1((\mathbb{R}^3)^*)$ gibt, so dass $\eta = \beta_1 \wedge \beta_2$.

**Aufgabe 7 (5 Punkte):** Sei $V = \mathbb{R}^4$, Wir betrachten $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 \in \Lambda^2(V^*)$.

(a) Berechnen Sie $\omega \wedge \omega$.

(b) Berechnen Sie $(\omega \wedge \omega)(e_1, e_2, e_3, e_4)$.

(c) Seien $\beta_1, \beta_2 \in \Lambda^1(V^*)$. Zeigen sie, dass

$$((\beta_1 \wedge \beta_2) \wedge (\beta_1 \wedge \beta_2)) = 0$$

(d) Gibt es für jede 2-Form $\omega$ eine Zerlegung mittels 1-Formen, d.h. $\omega = \beta_1 \wedge \beta_2$?

**Aufgabe 8:** Wir betrachten $\omega \in \Omega_1^3(\mathbb{R}^5)$ mit

$$\omega = e^{x_1^2} x_3 \sin(x_5) dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_5 + \arctan(x_1 x_2) x_3 x_4 dx_1 \wedge dx_5 \wedge dx_2.$$

Berechnen Sie $d\omega$.

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8914**