Prof. Guido Sweers **WS 2014/2015**
Jan M. Krämer

Analysis 3
Übungsblatt 2

Die Lösungen für dieses Übungsblatt müssen bis zum 22. Oktober um 16 Uhr im Übungsbriefkasten im Studierendenarbeitsraum abgegeben werden.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$, $g(z) = |z| - 1$ und

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Re}(z) > 0\}.$$

Geben Sie $f^{-1}(A)$ und $g^{-1}(A)$ an.

Aufgabe 2: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - [x]$.

(a) Seien

$$A_1 = \left(-\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{4}\right),\ A_2 = \left(0, \tfrac{5}{4}\right),\ A_3 = (0,2),\ A_4 = [0,3]$$

und

$$B_1 = (0,2)\,, B_2 = (1,2)\,, B_3 = [0,3]\,, B_4 = \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right].$$

Geben Sie $f(A_i)$ und $f^{-1}(B_i)$ für $i = 1,2,3,4$ an.

(b) Zeigen Sie, dass f $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$-messbar ist. $\mathcal{A}$ ist hier die Borel-σ-Algebra der offenen Mengen der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3: Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion.

(a) Sei J eine Menge und $Y_j \subset Y$ für alle $j \in J$. Beweisen Sie, dass

$$\bigcup_{j\in J} f^{-1}(Y_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right), \quad \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j) = f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right).$$

(b) Sei I eine Menge und $X_i \subset X$ für $i \in I$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass

$$\bigcup_{i\in I} f(X_i) = f\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right), \quad \bigcap_{i\in I} f(X_i) = f\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right).$$

Aufgabe 4 (5 Punkte): Wir betrachten $\mathbb{N}$ mit der Topologie

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{\text{ungerade Zahlen in } \mathbb{N}\}, \{\text{gerade Zahlen in } \mathbb{N}\}, \mathbb{N}\}.$$

Wir betrachten die Funktionen $f(n) = n^2$ und $g(n) = 2n + 1$.

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass f und g $\mathcal{A}_\mathcal{T}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar sind.

Aufgabe 5: Geben Sie zwei messbare Räume $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ und eine Funktion $f : X \to Y$ an, so dass f nicht $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar ist.

Aufgabe 6: Geben Sie eine $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$-messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, so dass f in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ unstetig ist. $\mathcal{A}$ ist hier die Borel-σ-Algebra der offenen Mengen der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 7 (5 Punkte): Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt σ-subadditiv, wenn für jede Folge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ gilt, dass

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Ähnlich nennt man μ subadditiv, wenn für endlich viele $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ gilt, dass

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n).$$

Beweisen oder widerlegen Sie die einzelnen Behauptungen für eine Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$:

$$\begin{array}{ccc} \mu \text{ ist } \sigma\text{-additiv} & \Longrightarrow & \mu \text{ ist } \sigma\text{-subadditiv} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mu \text{ ist additiv} & \Longrightarrow & \mu \text{ ist subadditiv} \end{array}$$

Aufgabe 8 (5 Punkte): Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $B \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass μ_B definiert durch

$$\mu_B(A) = \mu(A \cap B)$$

ein Maß ist für $(X, \mathcal{A})$.

Aufgabe 9: Sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ und $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ sei die kleinste σ-Algebra die $\mathcal{B}$ enthält. Seien $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{A}_\mathcal{B})$ messbare Räume.

Beweisen Sie, dass $f : X \to Y$ genau dann eine $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_\mathcal{B}$-messbare Abbildung ist, falls gilt

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \text{für alle } B \in \mathcal{B}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\{B \in \mathcal{A}_\mathcal{B}; f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$.

Aufgabe 10: Wir betrachten

$$\mathcal{B} = \{\{x\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); x \in \mathbb{R}\}$$

(a) Aus welchen Mengen besteht $\mathcal{A}_\mathcal{B}$?

(b) Welche Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind messbar?

(c) Erfüllt $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ die Eigenschaften einer Topologie?

Aufgabe 11: Seien $(X, \mathcal{S})$ und $(Y, \mathcal{T})$ messbare Räume, $f : X \to Y$ sei $\mathcal{S}$-$\mathcal{T}$-messbar und μ ein Maß auf $\mathcal{S}$. Dann heißt

$$\tilde{\mu}(T) := \mu(f^{-1}(T)), \text{ für } T \in \mathcal{T},$$

das Bildmaß von μ unter f. Zeigen Sie dass $\tilde{\mu} =: f(\mu)$ ein Maß ist.

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8914**