Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **WS 2014/2015**

Analysis 3
Übungsblatt 3

Die Lösungen für dieses Übungsblatt müssen bis zum 29. Oktober um 16 Uhr im Übungsbriefkasten im Studierendenarbeitsraum abgegeben werden.

Gemeinsam Lösungen zu diskutieren kann sehr nützlich sein, am Ende soll jedoch jeder einzeln und selbstständig die Lösungen formulieren. Bei identisch ausgearbeiteten Hausaufgaben bezweifeln wir die Selbstständigkeit und werden die Gesamtpunktzahl auf die betreffenden Personen verteilen.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Zusätzliche Rechenregeln:

$$\text{Für alle } x \in [0,\infty] \text{ gilt } x + \infty = \infty + x = \infty.$$
$$\text{Für alle } x \in (0,\infty] \text{ gilt } x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty.$$

Stimmen die folgenden Aussagen für alle $a, b, c \in [0,\infty]$?

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$
2. $a+b = c+b \implies a = c$
3. $ab = cb$ und $b \neq 0 \implies a = c$
4. Seien $a_n, b_n \in \mathbb{R}^+$. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.
5. Seien $a_n, b_n \in \mathbb{R}^+$. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

PS: Wir sagen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, wenn es für jedes $M \in \mathbb{N}$ ein $n_M \in \mathbb{N}$ gibt mit $n \geq n_M \implies a_n > M$.

Aufgabe 2: Wir definieren für $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$:

$$\nu(A) = \begin{cases} 0 \text{ falls } A = \emptyset \\ \min\{m - n;\ m, n \in \mathbb{Z} \text{ und } A \subset [n, m]\} \text{ falls } A \text{ beschränkt} \\ \infty \text{ falls } A \text{ unbeschränkt} \end{cases}$$

1. Ist ν ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}$?
2. Ist ν ein Maß auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 3: Sei μ^* ein äußeres Maß auf X. Man definiere für $A \in \mathcal{P}(X)$

$$\mu_*(A) := \inf\{\mu^*(B) - \mu^*(B \cap A^c); B \in \mathcal{P}(X) \text{ mit } A \subset B \text{ und } \mu^*(B \cap A^c) < \infty\}.$$

1. Zeigen Sie, dass $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ gilt für $A \in \mathcal{A}(\mu^*)$.

Aufgabe 4 (15 Punkte): Wir betrachten den messbaren Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

1. Definiere $\mu_1 : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ durch

$$\mu_1(A) = \sum_{n \in A} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

   Ist μ_1 ein Maß für $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$?

2. Definiere $\mu_2 : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ durch

$$\mu_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \subset \mathbb{N} \text{ endlich viele Elemente hat,} \\ \infty, & \text{falls } A \subset \mathbb{N} \text{ unendlich viele Elemente hat.} \end{cases}$$

   Ist μ_2 ein Maß für $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$?

3. Es sei die Funktion $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\mu^*(A) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arctan(n), & \text{falls } A \text{ genau } n \text{ Elemente hat,} \\ 1, & \text{falls } A \subset \mathbb{N} \text{ unendlich viele Elemente hat.} \end{cases}$$

   a) Zeigen Sie, dass μ^* ein äußeres Maß ist für $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

   b) Welche Mengen sind μ^*-messbar?

Aufgabe 5: Sei h_s^* das äußere Hausdorff-Mass mit $s \in [0, n]$ auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

1. Wenn $0 \le s < t \le n$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist derart, dass $h_s^*(A) < \infty$ ist, dann gilt $h_t^*(A) = 0$.

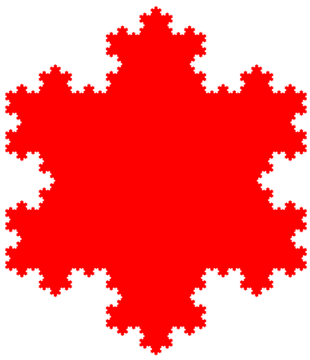
2. Wenn $0 \le s < t \le n$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist derart, dass $h_t^*(A) > 0$ ist, dann gilt $h_s^*(A) = \infty$.

3. Für jedes beschränkte $A \subset \mathbb{R}^n$ gibt es genau ein $s_A \in [0, n]$ derart, dass

$$h_s^*(A) = 0 \text{ für } s > s_A \text{ und } h_s^*(A) = \infty \text{ für } s < s_A.$$

   Man nennt s_A die Hausdorff-Dimension von A.

4. Berechnen Sie die Hausdorff-Dimension der Kochschen Schneeflocke (Koch's snowflake). Damit wird der Rand (!) der folgenden Figur bezeichnet:



   Die Definition der Kochschen Schneeflocke findet man im letzten Kapitel der Notizen zur Vorlesung Analysis 1.

Aufgabe 6: Sei h_1^* das äußere Hausdorff-Mass. Zeigen Sie:

1. Für einen Polygonzug $p\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \bigcup_{i=1}^{n-1} \left[x_i, x_{i+1}\right]$ mit $x_i \in \mathbb{R}^2$, bei dem kein Streckenstück zweimal durchlaufen wird, gilt

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left\| x_{i+1} - x_i \right\| = 2h_1^* \left(p\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right).$$

2. Für stetig differenzierbare $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gilt

$$\text{Bogenlänge}\left(\gamma\right) = 2h_1^* \left(\gamma\left[0,1\right]\right).$$

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8914**