Prof. Guido Sweers **WS 2014/2015**
Jan M. Krämer

Analysis 3
Übungsblatt 4

Die Lösungen für dieses Übungsblatt müssen bis zum 05. November um 16 Uhr im Übungsbriefkasten im Studierendenarbeitsraum abgegeben werden.

Aufgabe 1: Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ offen $\implies \lambda(A) > 0$.
2. $\lambda(A) > 0 \implies A^\circ \neq \emptyset$
3. $A \subset \mathbb{R}$ abzählbar $\implies \lambda(A) = 0$
4. $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar, $\lambda(A) = 0 \implies \lambda(\overline{A}) = 0$.
5. $\lambda(A) = 0 \implies A$ ist abzählbar.
6. $d(A_1, A_2) > 0 \implies A_1 \cap A_2 = \emptyset$
7. $A_1 \cap A_2 = \emptyset \implies d(A_1, A_2) > 0$
8. $A \subset \mathbb{R}$ und $\lambda^*(A) = 0$ $\implies A$ ist Lebesgue-messbar

Aufgabe 2: Wir betrachten die in der Vorlesung definierte Cantor-Menge C. Man kann sich überlegen, dass die Cantor-Menge aus allen Punkten $x \in [0,1]$ besteht, für die es eine Darstellung zur Basis 3 gibt, die ohne 1 auskommt. D.h. $1 = (1.0)_3 = (0.2222\ldots)_3 \in C$, genauso wie $\frac{1}{3} = (0.1)_3 = (0.02222\ldots)_3$, aber $0.4 = (0.101\ldots) \notin C$.

1. Zeigen Sie, dass C abgeschlossen ist.
2. Zeigen Sie, dass C nirgends dicht ist. Eine Menge A heißt dabei nirgends dicht, wenn $\left(\overline{A}\right)^\circ = \emptyset$.
3. Zeigen Sie, dass jeder Punkt in C ein Häufungspunkt von C ist. Eine Menge mit dieser Eigenschaft heißt *perfekt*.
4. Zeigen Sie, dass in der Teilraumtopologie auf C jede Teilmenge $A \subset C$ die aus mehr als einem Punkt besteht nicht zusammenhängend ist. Eine Menge mit dieser Eigenschaft heißt *total unzusammenhängend*.
5. Zeigen Sie, dass es eine surjektive Funktion $f : C \to [0,1]$ gibt.

   Hinweis: Dann ist C überabzählbar und gleichmächtig zu den reellen Zahlen.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Hausdorff-Dimension von C.

Aufgabe 4: Begründen Sie anschaulich, warum das Lebesgue-Maß verschiebungs- und rotationsinvariant ist.

Aufgabe 5: Wir betrachten den Raum $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit der Topologie $\mathcal{T}$, so dass eine Menge A offen, d.h. in der Topologie $\mathcal{T}$ ist, wenn $\infty \notin A$, oder wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \# \left(A \cap \{1, \ldots, n\}\right) = 1 \text{ und } \infty \in A.$$

1. Zeigen Sie, dass $\mu(A) = \#A$ ein Maß auf $\mathcal{P}(X)$ ist.

   Hinweis: $\#\{\infty\} = 1$.

2. Welche Mengen $K \subset X$ sind kompakt? Eine Menge heißt kompakt, wenn

$$\forall_{\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}} : K \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \implies \exists_{i_1,\ldots,i_k \in \mathbb{N}} : K \subset A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_k}.$$

3. Zeigen Sie, dass

$$\forall_{M\subset X} : \mu(M) = \sup\{\mu(K)\ ;\ K \subset M \text{ und } K \text{ kompakt}\}.$$

4. Zeigen Sie, dass die folgende Aussage falsch ist:

$$\forall_{M\subset X} : \mu(M) = \inf\{\mu(U)\ ;\ M \subset U \text{ und } U \text{ offen}\}.$$

Aufgabe 6: Sei $d(.,.)$ die Distanzfunktion zweier Mengen in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Man beweise oder wiederlege:

1. $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$ für alle $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.
2. $d(A \cup B, C) \leq \min(d(A,C), d(B,C))$ für alle $A, B, C \in \P(\mathbb{R}^n)$.
3. $d(A \cap B, C) \leq \max(d(A,C), d(B,C))$ für alle $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 7: Sei $A := f(\mathcal{R})$ die Menge aus Beispiel 4.9.

1. Ist A Borel-Messbar?
2. Ist $B := \{0\} \times A \subset \mathbb{R}^2$ Borel-messbar?
3. Ist B Lebesgue-messbar?
4. Geben Sie ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an, die Lebesgue-Borel-messbar ist, aber nicht Borel-Borel-messbar.
5. Geben Sie ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an, die nicht Lebesgue-Borel-messbar ist.
6. Geben Sie ein Beispiel für eine Menge an, die keine Nullmenge bezüglich des Borel-Maßes ist, aber Teilmenge einer solchen Nullmenge.

Aufgabe 8: Es sei $\mathcal{R} = \{\lfloor x \rfloor; x \in \mathbb{R}\}$ definiert wie in Beispiel 4.8. Bei der Konstruktion der nicht-Lebesgue-messbaren Menge wurde die Existenz einer Funktion f verwendet, die jedem $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{R}$ ein $x \in \mathbb{R}$ zuordnet. Tatsächlich gibt es viele solcher Funktionen f. Zeigen Sie:

1. Es gilt $\lambda^*(f(\mathcal{R})) > 0$ für jede dieser Funktionen f.
2. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ lässt sich eine solche Funktion f finden, dass $\lambda^*(f(\mathcal{R})) < \varepsilon$ gilt.

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8914**