Prof. Guido Sweers **WS 2014/2015**
Jan M. Krämer

Analysis 3
Übungsblatt 5

Die Lösungen für dieses Übungsblatt müssen bis zum 12. November um 16 Uhr im Übungsbriefkasten im Studierendenarbeitsraum abgegeben werden.

Aufgabe 1 (10 Punkte): Wir betrachten

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(s) = \int_s^1 \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ ihre Maxima annimmt in $\{a_{2k+1}; k \in \mathbb{N}\}$ und ihre Minima in $\{a_{2k}; k \in \mathbb{N}^+\}$ mit $a_k = \frac{1}{k\pi}$.

Hinweis: für b and c hilft die Transformation $\int_a^b \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_{1/b}^{1/a} \frac{1}{y} \sin(y)\, dy$ *und die Identität* $\int_{k\pi}^{(k+2)\pi} \frac{1}{y} \sin(y)\, dy = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+\pi}\right) \sin(y)\, dy$. *Benutzung auf eigene Gefahr (= kontrollieren Sie).*

(b) Zeigen Sie, dass $\{g(a_{2k+1})\}_{k\in\mathbb{N}}$ fallend ist und dass $\{g(a_{2k})\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ wachsend ist.

(c) Zeigen Sie $\lim_{k\to\infty} |g(a_{2k+1}) - g(a_{2k})| = 0$.

(d) Zeigen Sie (1) ist uneigentlich Riemann-integrierbar aber nicht Lebesgue-integrierbar.

Aufgabe 2: Konstruieren Sie einfache Funktionen $f_n, g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $f_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq g_n(x)$ und außerdem

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} f_n(x) d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} g_n(x) d\lambda.$$

Hinweis: Es gilt $(0,1) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [(1-\varepsilon)^{2(k+1)}, (1-\varepsilon)^{2k})$ *für alle* $\varepsilon \in (0,1)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte): Wir betrachten die Cantormenge C, die fette Cantormenge C_f und die charakteristischen Funktionen $\mathbf{1}_C : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{1}_{C_f} : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{1}_C$ und $\mathbf{1}_{C_f}$ Lebesgue-integrierbar über $[0,1]$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{1}_C$ Riemann-integrierbar über $[0,1]$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbf{1}_{C_f}$ nicht Riemann-integrierbar über $[0,1]$ ist.

Aufgabe 4: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbare Funktion.

Zeigen Sie: Ist $f(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so ist auch $\frac{1}{f}$ eine $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbare Funktion.

Aufgabe 5 (4 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass jede monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch $\mathcal{A}_\mathcal{T}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede unterhalbstetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch $\mathcal{A}_\mathcal{T}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar ist.

Hinweis: f heißt unterhalbstetig, falls $\forall_{x \in A} : \liminf\limits_{y \to x} f(y) \geq f(x)$.

Hinweis: Wie im Beweis von Satz 5.13 genügt es in beiden Fällen, die Urbilder von (a, ∞) für beliebige $a \in \mathbb{R}$ zu betrachten.

Aufgabe 6: Sei $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ und $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \mathbf{1}_A(x)$.

Dann existiert nach dem Satz von Lusin zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset A$, so dass $f_{|K}$ stetig ist und $\lambda(A \setminus K) < \varepsilon$.

Sei $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\}$. Zeigen Sie, dass

$$K_k := [0,1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(q_n - 2^{-(n+k)}, q_n + 2^{-(n+k)}\right)$$

für ausreichend großes k diese Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 7: Sei $M \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ sei $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{L}$ die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen auf $\mathbb{R}^n$.

$p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist die Projektion $p_1(x,y) = x$ und die Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ist definiert durch $u(x) = (x, 0)$.

$f(\mathcal{R}) \subset (0,1)$ sei eine nicht Lebesgue-messbare Menge (siehe Beispiel 4.9 und Aufgabe 6 auf Blatt 4). Wir definieren $B := f(\mathcal{R}) \times \{0\}$.

(a) Begründen Sie die Implikationen:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_\mathcal{T}\text{-}\mathcal{L}\text{-messbar} & \Longrightarrow & \mathcal{L}\text{-}\mathcal{L}\text{-messbar} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{A}_\mathcal{T}\text{-}\mathcal{A}_\mathcal{T}\text{-messbar} & \Longrightarrow & \mathcal{L}\text{-}\mathcal{A}_\mathcal{T}\text{-messbar} \end{array}$$

(b) Zeigen Sie, dass $M \times \{0\}$ Lebesgue-messbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass $M \times \{0\}$ genau dann Borel-messbar ist, wenn M Borel-messbar ist.

Hinweis: Betrachten Sie dazu die Urbilder unter p_1 bzw. u.

(d) Zeigen Sie, dass u nicht $\mathcal{L}$-$\mathcal{L}$-messbar ist, aber $\mathcal{A}_\mathcal{T}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar ist.

(e) Zeigen Sie, dass $\mathbf{1}_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}$-$\mathcal{L}$-messbar ist, aber nicht $\mathcal{A}_\mathcal{T}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar ist.

(f) Zeigen sie, dass $\mathbf{1}_B \circ u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar ist, obwohl beide Funktionen $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar sind.

(g) Im Diagramm aus (a) gibt es 12 mögliche Pfeile $\Longrightarrow$ oder $\not\Longrightarrow$. Ergänzen Sie alle fehlenden Pfeile.

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8914**