Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2014/2015

Analysis 3
Übungsblatt 6

Die Lösungen für dieses Übungsblatt müssen bis zum 19. November um 16 Uhr im Übungsbriefkasten im Studierendenarbeitsraum abgegeben werden.

Aufgabe 1: Wir betrachten $f_k : (0,1) \to \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. f_k konvergiere gleichmäßig auf $(0,1)$ gegen $f : (0,1) \to \mathbb{R}$. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

(a) Wenn alle f_k stetig sind, dann ist auch f stetig auf $(0,1)$.

(b) Wenn alle f_k in keinem Punkt $x \in [0,1]$ stetig sind, dann kann auch f nicht stetig auf $(0,1)$ sein.

Aufgabe 2 (6 Punkte):

(a) Finden Sie eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen $f_k : [0,1] \to [0,1]$ die punktweise in $[0,1]$ gegen $f : [0,1] \to [0,1]$ konvergieren, so dass f nicht Riemann-integrierbar auf $(0,1)$ ist.

Hinweis: Sei q_n eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Betrachten Sie $f_n = \mathbf{1}_{\{q_1,\ldots,q_n\}}$.

(b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : [0,1] \to [0,1]$ $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar und f_k konvergiere punktweise in $(0,1)$ gegen $f : [0,1] \to [0,1]$. Ist f Lebesgue-integrierbar auf $[0,1]$?

(c) Zeigen Sie, dass wenn f differenzierbar auf $(0,1)$ ist und f' beschränkt ist, die Ableitung f' Lebesgue-integrierbar auf $(0,1)$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie $f_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1-x}{n}\right) - f\left(x - \frac{x}{n}\right)\right)$ für $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Aufgabe 3: Es seien $f_k, g_k : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbare Funktionen, so dass $f_k \to f$ im Maß und $g_k \to g$ im Maß konvergieren.

(a) Sei $h : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda\left(\{x \in X\ ;\ h(x) > n\}\right) = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $f_k \cdot g_k$ gegen $f \cdot g$ im Maß konvergiert, wenn $\lambda(X) < \infty$.

(c) Sei $X = [0,\infty)$. Zeigen Sie, dass $f_k(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < n \\ \sqrt{x^2+1} & \text{für } x \geq n \end{cases}$ im Maß gegen $f(x) = x$ konvergiert, aber $f_k \cdot f_k$ nicht.

Aufgabe 4 (8 Punkte): Wir betrachten punktweise Konvergenz, punktweise Konvergenz fast überall, gleichmäßige Konvergenz, Konvergenz im Maß und $\mathcal{L}^1$-Konvergenz.

Untersuchen Sie für jede Funktionenfolge $\{f_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $i \in \{1,2,3,4\}$, welcher der Konvergenzbegriffe zutrifft und geben Sie eine Grenzfunktion an.

(a) $f_{1,n} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $\quad f_{1,n}(x) = \sqrt[n]{\sin(x)^2}$

(b) $f_{2,n} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\quad f_{2,n}(x) = n\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$

(c) $f_{3,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_{3,n}(x) = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]}(x)$

(d) $f_{4,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_{4,n}(x) = \mathbf{1}_{[n,n+1]}(x)$

Aufgabe 5 (6 Punkte): $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbare Funktion.

(a) Sei $A_n = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; f(x) < n\}$. Zeigen Sie, dass aus $\int_{\mathbb{R}} |f| \, d\lambda < \infty$ folgt, dass $f_n(x) = f(x)\mathbf{1}_{A_n}(x)$ im Maß gegen f konvergiert.

(b) Gilt die Aussage auch, wenn $\int_{\mathbb{R}} |f| \, d\lambda = \infty$?

Aufgabe 6: Wir definieren die Funktionen $f_n, g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}^+$ durch

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n - 1} \max\left(0, 1 - 4^n \left| x - \frac{k}{2^n} \right| \right) \quad \text{und} \quad g_n(x) = \sum_{m=1}^{n} f_m(x)$$

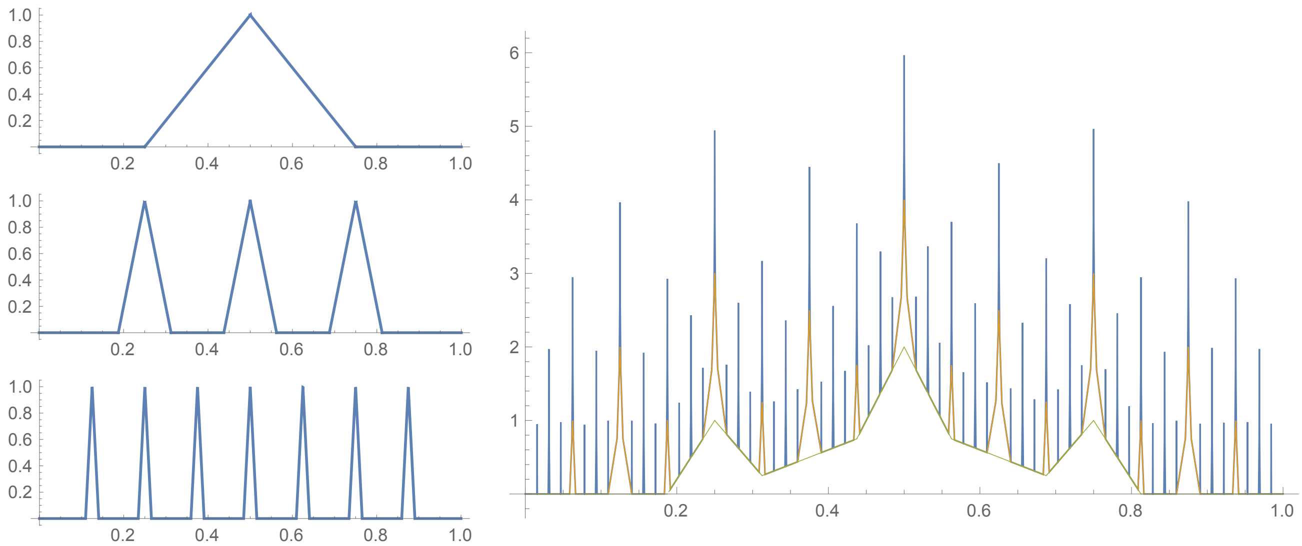

Abbildung 1: Links g_1, g_2 und g_3; rechts f_2, f_4 und f_6.

(a) Zeigen Sie, dass jede Funktion g_n stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $\{g_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ wachsend ist für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie, dass $\lim_{n \to \infty} g_n(x) = \infty$ für alle $x \in (0,1)$ mit endlicher Entwicklung zur Basis 2.

(d) Zeigen Sie, dass $\int_0^1 f_n(x) dx \leq (2^n - 1)4^{-n}$ und $\int_0^1 g_n(x) dx \leq \frac{2}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(e) Folgern Sie, dass

$$\lambda \left\{ x \in [0,1] \, ; \, \lim_{n \to \infty} g_n(x) = \infty \right\} = 0.$$

(f) Zeigen Sie, dass $\|g_{n_1} - g_{n_2}\|_\infty \geq 1$ für $n_1 \neq n_2$.

(g) Zeigen Sie, dass $\|g_{n_1} - g_{n_2}\|_{\mathcal{L}^1} \leq \frac{1}{2^{\min(n_1, n_2)}}$ für $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^+$.

(h) Weil $\left(L^1(0,1), \|\cdot\|_{L^1}\right)$ ein vollständiger metrischer Raum ist, existiert eine Limesfunktion(sklasse vertreten durch) $g_\infty \in \mathcal{L}^1(0,1)$. Zeigen Sie, dass g_∞ nirgendwo stetig ist.

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8914**