Prof. Guido Sweers **WS 2014/2015**
Jan M. Krämer

Analysis 3
Übungsblatt 7

Die Lösungen für dieses Übungsblatt müssen bis zum 26. November um 16 Uhr im Übungsbriefkasten im Studierendenarbeitsraum abgegeben werden.

Aufgabe 1 (4 Punkte): Sei $f_n(x) = \mathbf{1}_{[n-1,n]}(x) - \mathbf{1}_{[n,n+1]}(x)$. Zeigen Sie, dass $g_m = \sum_{n=1}^{m} f_n$ punktweise konvergiert und berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} f_n \, d\lambda \text{ und } \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{m} f_n \, d\lambda.$$

Aufgabe 2 (12 Punkte):

(a) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^{\frac{1}{n}}}{1+x^2} dx$.

(b) Berechnen Sie $\int_0^\infty \lim_{t\to\infty} \frac{xt^2}{t^4+x^4} dx$ und $\lim_{t\to\infty} \int_0^\infty \frac{xt^2}{t^4+x^4} dx$.

(c) Berechnen Sie $\lim_{k\to\infty} \int_0^\pi \frac{k\cos(x)+1}{\ln(1+x) + \frac{k^2}{\sqrt{k^2+1}} e^x} dx$

(d) Sei $f_n(x) = 2^n \exp\left(-4^n (x - \frac{1}{n})^2\right)$. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \text{ und } \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x) dx.$$

Aufgabe 3: Finden Sie eine Folge von Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 2 \text{ und } \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x) dx = -2.$$

Aufgabe 4: Sei $f(x,y) = xe^{-x^2y^2}$ und sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy.$$

Es gilt $F(1) = \sqrt{\pi}$ und $F(0) = 0$. Berechnen Sie $F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist F stetig?

Aufgabe 5 (4 Punkte): Sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und f' beschränkt. Wir wissen aus Aufgabe 2 von Blatt 6, dass f' Lebesgue-integrierbar auf $(0,1)$ ist. Zeigen Sie, dass

$$\int_{[a,b]} f' \, d\lambda = f(b) - f(a) \text{ für alle } 0 < a < b < 1.$$

Hinweis: Benutzen Sie den Satz über majorisierte Konvergenz für den Differenzenquotienten und die Tatsache, dass f eine Stammfunktion hat, weil f stetig ist.

Aufgabe 6:

(a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(t,x) = \begin{cases} \frac{t^3}{x^2} e^{-\frac{t^2}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$

Berechnen Sie $\left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} f(t,x) dx \right)_{t=0}$ und $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \right)_{t=0} dx$.

(b) $X \subset \mathbb{R}^n$ sei messbar und es gelte für $f(t,x) : (0,1) \times X \to \mathbb{R}$, dass

- $x \mapsto f(t,x)$ ist in $\mathcal{L}^1(X)$ für alle $t \in (0,1)$
- $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ existiert für alle $(t,x) \in (0,1) \times X$
- $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$ und $g \in \mathcal{L}^1(X)$.

Zeigen Sie, dass dann

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \int_X f(t,x) dx \right) = \int_X \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \right) dx.$$

Aufgabe 7: Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ eine $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbare Funktion und $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda < \infty$.
Wir nehmen an es gebe ein $C > 0$ und eine Folge von messbaren Mengen $M_n \subset \mathbb{R}$, so dass $\lambda(M_n) < 2^{-n}$ und $\displaystyle\int_{M_n} f d\lambda \geq C > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $g_n(x) = f(x)\mathbf{1}_{M_n}(x)$ fast überall gegen $g(x) \equiv 0$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass dies ein Widerspruch zur Annahme ist.

(c) Zeigen Sie, dass für jede beliebige Folge $M_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(M_n) = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \int_{M_n} f d\lambda = 0.$$

Aufgabe 8: $f : X \to [0, \infty)$ und $f_n : X \to [0, \infty)$ für $n \in \mathbb{N}$ seien integrierbar.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ f.ü. und } \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\lambda = \int_X f d\lambda \right) \implies \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\lambda = 0.$$

Hinweis: Betrachten Sie

$$2 \int_X f dx = \int_X \lim_{n\to\infty} \left(f_n + f - |f_n - f| \right) dx$$

und nutzen Sie für die rechte Seite das Lemma von Fatou.

(b) Zeigen Sie, dass die umgekehrte Implikation falsch ist.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\lambda = 0 \implies \left(\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f \text{ f.ü. und } \lim_{k\to\infty} \int_X f_{n_k} d\lambda = \int_X f d\lambda \right)$$

mit einer geeigneten Teilfolge f_{n_k}.

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8914**