Prof. Guido Sweers **WS 2014/2015**
Jan M. Krämer

Analysis 3
Übungsblatt 8

Die Lösungen für dieses Übungsblatt müssen bis zum 03. Dezember um 16 Uhr im Übungsbriefkasten im Studierendenarbeitsraum abgegeben werden.

Aufgabe 1: Seien $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ mit $p \in [1, \infty]$. Wahr oder nicht wahr?

$$f = g \ \lambda\text{-fast überall in } \mathbb{R} \iff \|f - g\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R})} = 0.$$

Aufgabe 2: Wir betrachten eine Funktionenfolge $f_n : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mit $\lambda(X) < \infty$.

(a) Es gelte $f_n \to f$ λ-fast-überall und $f_n \to g$ im $\mathcal{L}^1$-Sinn. Zeigen Sie, dass $f = g$ λ-fast-überall.

(b) Es gelte $f_n \to f$ und $f_n \to g$ im $\mathcal{L}^1$-Sinn. Zeigen Sie, dass $f = g$ λ-fast-überall.

(c) Es gelte $f_n \to f$ und $f_n \to g$ dem Maß nach. Zeigen Sie, dass $f = g$ λ-fast-überall.

(d) Es gelte $f_n \to f$ punktweise fast überall und $f_n \to g$ dem Maß nach. Zeigen Sie, dass $f = g$ λ-fast-überall.

Aufgabe 3 (9 Punkte): (a) Zeigen Sie, dass für alle $f \in \mathcal{L}^\infty([0,1])$ gilt, dass

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1([0,1])} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty([0,1])}.$$

(b) Sind die Normen $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}$ und $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty}$ auf $\mathcal{L}^\infty([0,1])$ äquivalent?

(c) Zeigen Sie, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ gibt, so dass $\|f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})} \geq n \|f_n\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})}$.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei $C^1([0,2]) := \{u : [0,2] \to \mathbb{R}\ ;\ \ u \text{ ist stetig differenzierbar auf } [0,2]\}$. Welche der folgenden Funktionen n_i sind Normen auf $C^1([0,2])$? Beweisen Sie Ihre Aussage.

(a) $n_1(u) = \|u'\|_{\mathcal{L}^\infty}$

(b) $n_2(u) = |u(0)| + \|u'\|_{\mathcal{L}^\infty}$

(c) $n_3(u) = \|u\|_{\mathcal{L}^\infty} + \|u'\|_{\mathcal{L}^\infty}$

(d) $n_4(u) = \|u\|_{\mathcal{L}^1}$.

(e) $n_6(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} |u(q_n)|$, wobei q_n eine feste Abzählung von $[0,2] \cap \mathbb{Q}$ sei.

Aufgabe 5 (6 Punkte): Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = |x|^a (1 + |x|)^b$.

(a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$?

(b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist $f \in \mathcal{L}^1(B_1(0))$?

Aufgabe 6: Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = |x|^\alpha (\ln(1 + |x|))^\beta$ in $\mathcal{L}^1((0, \infty))$?

Aufgabe 7: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar, aber nicht nicht Lebesgue-integrierbar. Zeigen Sie, dass dann $\int_{(a,b)} \max(f(x), 0)\, dx = \infty$.

Aufgabe 8: (a) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda(X) < \infty$ und $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^q(X) \subset \mathcal{L}^p(X)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $p, q \in [1, \infty)$ gilt, dass

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^q(\mathbb{R}) \implies p = q.$$

(c) Sei $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ mit $\lambda(X) < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}\,.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt, dass

$$\|f\|_{L^\infty(X)} - \varepsilon \leq \lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(X)} \leq \|f\|_{L^\infty(X)} + \varepsilon.$$

Aufgabe 9:

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $n : \mathcal{L}^1([0,2]) \to \mathbb{R}$, definiert durch $n(u) = \left(\int_{[0,2]} |u|^p \;dx\right)^{\frac{1}{p}}$ mit $p \in (0,1)$ wohldefiniert ist.

(b) Handelt es sich dabei um eine Norm?

Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen $u = \mathbf{1}_{[0,1]}$ und $v = \mathbf{1}_{[1,2]}$.

Aufgabe 10: Seien $p_1, \ldots, p_n \in [1, \infty]$ mit $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} = 1$, wobei wir für $p_k = \infty$ ausnahmsweise $\frac{1}{p_k} = 0$ setzen. Seien $f_k \in \mathcal{L}^{p_k}(X)$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass

$$\left\| \prod_{k=1}^n f_k \right\|_{\mathcal{L}^1} \leq \prod_{k=1}^n \|f_k\|_{\mathcal{L}^{p_k}}$$

Aufgabe 11:

(a) Seien $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(mx) & \text{für } n = 2m \text{ mit } m \in \mathbb{N}, \\ \cos(mx) & \text{für } n = 2m+1 \text{ mit } m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\langle f_{n_1}, f_{n_2} \rangle_{\mathcal{L}^2} = 0$ für alle $n_1 \neq n_2$.

(b) Finden Sie α_n, so dass $\alpha_n f_n$ Einheitsvektoren in $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ sind.

Aufgabe 12: Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, ungerade und streng monoton wachsend, und sei $X \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar.

(a) Zeigen Sie, dass $\Phi(t) = \int_0^t \phi(s) ds$ eine gerade und konvexe Funktion ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{\Phi,X}$, definiert durch

$$\|f\|_{\Phi,X} := \inf \left\{ k > 0; \int_X \Phi\left(\frac{f}{k}\right) \;d\lambda < 1 \right\},$$

eine Seminorm ist auf $\mathcal{L}^\infty(X) \cap \mathcal{L}^1(X)$. Diese (Semi-)Norm heißt Luxemburg-Norm.

(c) Zeigen Sie, dass man für $\Phi(t) = |t|^p$ die $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(X)}$-Norm bekommt.

Hinweis: Eine Funktion f heißt gerade, wenn $f(x) = f(-x)$ und ungerade, wenn $f(x) = -f(-x)$.

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8914**