Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2014/2015

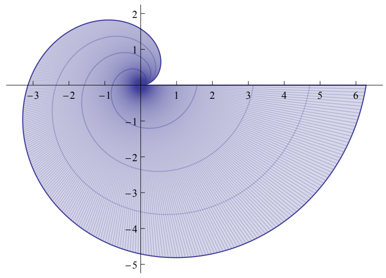
Analysis 3
Übungsblatt 9

Die Lösungen für dieses Übungsblatt müssen bis zum 10. Dezember um 16 Uhr im Übungsbriefkasten im Studierendenarbeitsraum abgegeben werden.

Aufgabe 1: Sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{für } 0 < y < x \\ -\frac{1}{y^2} & \text{für } 0 < x < y \\ 0 & \text{für } x = y,\ xy = 0 \end{cases}$

(a) Berechnen Sie $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy$, $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx$ und $\int_{[0,1]^2} f\, d\lambda$

(b) Berechnen Sie $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_\varepsilon(0) \cap [0,1]^2} f\, d\lambda$ und $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_\varepsilon(0) \cap [0,1]^2} |f|\, d\lambda$



Aufgabe 2 (4 Punkte): Sei $C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < \arg(z)\}$, wobei $\arg(z) \in [0, 2\pi)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt von C.

Aufgabe 3: Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\int_{B_1(0)} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, d(x,y)$.

(b) $\int_{B_{3\pi}(0) \setminus B_{2\pi}(0)} \cos(\|x\|)\, d(x_1, x_2)$.

Aufgabe 4 (6 Punkte): Berechnen Sie

(a) $\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\|x\|}\, dx$

(b) $\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\|x\|^2}\, dx$

(c) $\int_{0 \le y \le x \le 1} \frac{y}{x^2}\, d(x,y)$

Aufgabe 5: (a) Sei $X = \{(x,y) \in [0,1]^2\ ;\ x + y < 1\}$. Berechnen Sie $\int_D e^{\frac{y}{x+y}}\, d(x,y)$.

Hinweis: Substituieren Sie $(u,v) = (x + y, \frac{y}{x+y})$.

(b) Sei $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ 0 < x+y < 2, 0 < x-y < 2\}$. Berechnen Sie $\int_X \left(x^2 - y^2\right)\, d(x,y,z)$.

(c) Sei $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9, z \ge 0\}$. Berechnen Sie $\int_X \frac{z}{1 + x^2 + y^2}\, d(x,y,z)$.

Aufgabe 6 (6 Punkte): Sind die folgenden Funktionen Diffeomorphismen?

(a) $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, definiert durch $F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

(b) $G : (0,\infty)^3 \to (0,\infty)^3$, definiert durch $G(x,y,z) = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, xyz)$.

(c) $H : B_1(0) \to \mathbb{R}^n$, definiert durch $H(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}$.

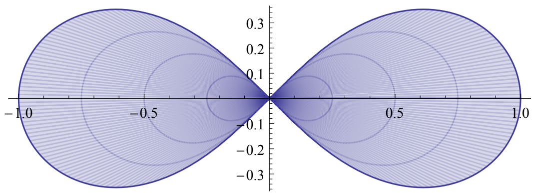
Aufgabe 7 (4 Punkte): Berechnen Sie das Volumen der Menge in $[0,\infty)^2$, die von den Kurven $y = 2x$, $y = \frac{1}{2}x$, $xy = 8$ und $xy = \frac{1}{2}$ berandet wird.

Hinweis: Die Substitution $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ hilft.

Aufgabe 8: Sei $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und $g(x) = f(x - \frac{1}{x})$ mit $g(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda$.

Hinweis: Sei $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi(y) = y - \frac{1}{y}$. Dann sind $\varphi_{|\mathbb{R}_+}$ und $\varphi_{|\mathbb{R}_+}$ Diffeomorphismen.

Aufgabe 9: $K = \{(x,y)\ ;\ (x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2\}$ ist der Rand einer beschränkten Menge M. Berechnen Sie den Flächeninhalt von M.
Hinweis: Polarkoordinaten $(r(\phi), \phi)$.



Aufgabe 10: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $m < n$. Berechnen Sie das n-dimensionale Volumen von

$$M = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ ;\ x_1^2 + \ldots + x_m^2 \le x_{m+1}^2 + \ldots + x_n^2 \le 1\right\}$$

Aufgabe 11: *Eine Aufgabe aus Wikipedia:*

Sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx\right) dy$, $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy\right) dx$ und $\displaystyle\int_{[0,1]^2} f\, d\lambda$

Aufgabe 12: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ mit und $\lambda(X) < \infty$. Der Schwerpunkt $S = (S_1, \ldots, S_n) \in \mathbb{R}^n$ von X wird definiert durch $S_i = \dfrac{1}{\lambda(X)} \displaystyle\int_X x_i\, d(x_1, \ldots, x_n)$.

(a) Berechnen Sie den Schwerpunkt von D.

(b) Sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(a,0)$ und (b,c) mit $a > 0$ und $c > 0$. Berechnen Sie den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.

(c) Sei $K = \{(r\cos(\phi), r\sin(\phi))\ ;\ r \in (0,2), \phi \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})\}$ Kreisstück. Berechnen Sie den Schwerpunkt.

(d) Liegt der Schwerpunkt immer in X?

(e) Berechnen Sie den Schwerpunkt der Fläche, die von $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ und $x = 2 - y$ berandet wird.

Aufgabe 13: Wir betrachten $f : (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times (1,\infty) \to (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \mathbb{R}_+$, definiert durch

$$f(s,\varphi,r) = \left(sr\cos(\varphi), sr\sin(\varphi), \sqrt{r^2-1}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass f ein Diffeomorphismus ist.

(b) Sei $H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times (0,2)\ ;\ \frac{1}{2}(1+z^2) \le x^2 + y^2 \le 2(1+z^2)\right\}$. Berechnen Sie $f^{-1}(H)$

(c) Berechnen Sie $\int_H x^2 z\, d\lambda$.

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8914**