NAME: AUFGABE 1

Sei X eine Menge und seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{P}(X)$ zwei σ-Algebren über X.

(i) Ist $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra über X?

(ii) Ist $\mathcal{A} := \{A_1 \cap A_2; A_1 \in \mathcal{A}_1 \text{ und } A_2 \in \mathcal{A}_2\}$ eine σ-Algebra über X?

Begründen Sie Ihre Antworten.

NAME: AUFGABE 2

Wir definieren $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}^+$ durch $f_n(x) = (\cos(nx))^{2n}$.

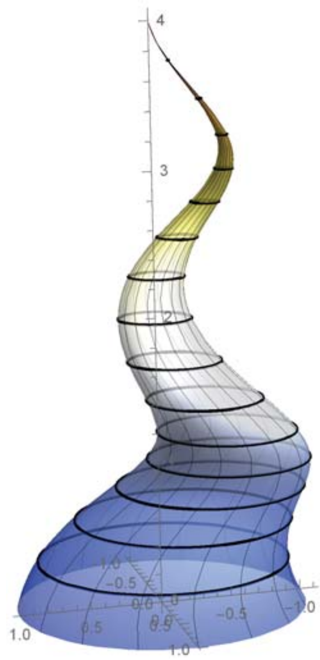
(i) Gilt $\int_0^{2\pi} (\cos(nx))^{2n}\, dx = \int_0^{2\pi} (\cos(x))^{2n}\, dx$ für $n \in \mathbb{N}^+$?

(ii) Konvergiert f_n gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$ für $n \to \infty$?

(iii) Konvergiert f_n in $\mathcal{L}^1([0, 2\pi])$ für $n \to \infty$?

Begründen Sie Ihre Antworten.

NAME: AUFGABE 3



Sei $R(t) = \left(1 - \frac{1}{4}t\right)^2$ und betrachte

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) - \frac{1}{4}\left(1 - \cos(\pi t)\right) \\ r\sin(\varphi) - \frac{1}{3}\sin(\pi t) \\ t \end{pmatrix} ;\ \text{mit} \begin{array}{l} 0 \le t \le 4\,, \\ 0 \le r \le R(t)\,, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right\}.$$

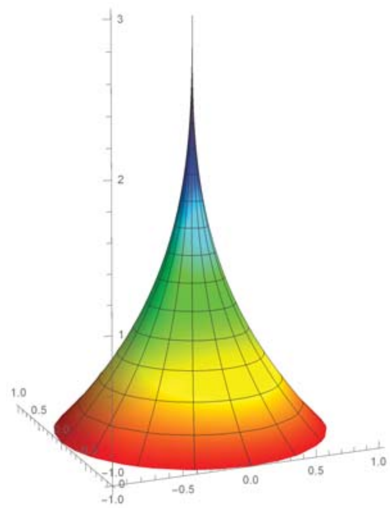
(i) Sei $t_0 \in [0,4]$. Zeigen Sie, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 ; \begin{pmatrix} x \\ y \\ t_0 \end{pmatrix} \in Z \right\}$$

eine Kreisscheibe mit Radius $R(t_0)$ ist.

(ii) Berechnen Sie das Volumen von Z.

NAME: AUFGABE 4



Sei $H = \{\vec{x}(t,\varphi)\,; 0 \le t \le 1 \text{ und } |\varphi| \le \pi\}$, wobei

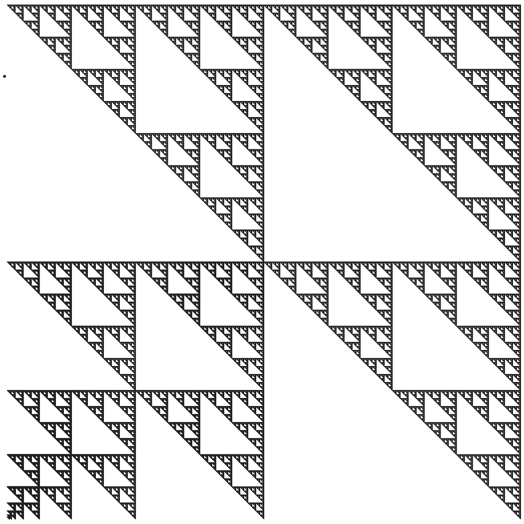
$$\vec{x}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} t^3\cos\varphi \\ t^3\sin\varphi \\ 3 - 3t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt von H.

Name: | Aufgabe 5

$T \subset K := [0,1] \times [0,1]$ wie im Bild sei wie folgt definiert:

- $T_{ro} := T \cap \{(x,y)\,;x+y \geq 1\}$ wird konstruiert, indem man aus dem vollen oberen Dreieck $\{(x,y)\,;0 \leq 1-x \leq y \leq 1\}$ im n^{ten} Schritt 3^{n-1} disjunkte, rechteckige Dreiecke der Form ◺ mit Breite/Höhe 2^{-n} entfernt ($n \in \mathbb{N}^+$).
- Für alle $(x,y) \in K$ gilt, dass $(x,y) \in T \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right) \in T$.



(i) Zeigen Sie $\lambda_2(T) = 0$ und $\lambda_1^{(2)}(T) = \infty$.

Sei h_s^* das s-dimensionale äußere Hausdorffmaß.

(ii) Zeigen Sie, dass die Hausdorff-Dimensionen von T und von T_{ro} identisch sind.

(iii) Angenommen, dass $0 < h_s^*(T) < \infty$ gilt für die Hausdorff-Dimension s von T, so berechnen Sie s.

Name: | Aufgabe 6

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_s(x) = \dfrac{|x|^s}{1+|x|^2}$ für $|x| \neq 0$.
Für welche Parameter $s \in \mathbb{R}$ und Dimensionen $n \in \mathbb{N}^+$ gilt $f_s \in L^2(\mathbb{R}^n)$?
Begründen Sie Ihre Antwort.

NAME:	AUFGABE 7	

Sei $V = \mathbb{R}^4$ und definiere $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda(V^*)$ durch

$$\omega_1 = x_1 dx_2 \quad \text{und } \omega_2 = x_3 dx_4.$$

Berechnen Sie:

(i) $(\omega_1 \wedge \omega_2)(\vec{e}_2, \vec{e}_4)$,

(ii) $d(\omega_1 \wedge \omega_2)(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,

(iii) $(d\omega_1 \wedge d\omega_2)(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$.

NAME:	AUFGABE 8	

Gegeben sind:

- Die Menge $S = \left\{(x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 12 \text{ und } z < 6\right\}$.
- Das Vektorfeld $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ e^{x\sin(yz)} \end{pmatrix}$.
- Der nach außen gerichtete Normalenvektor $\vec{n}$ auf S.

Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\displaystyle\iint_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n}\, d\sigma$.