





# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Teilmengen und Strukturen</b>                | <b>1</b>  |
| 1.1      | Topologie, Metrik und Norm . . . . .            | 1         |
| 1.1.1    | Topologie . . . . .                             | 1         |
| 1.1.2    | Metrik . . . . .                                | 2         |
| 1.1.3    | Zusammenhang . . . . .                          | 3         |
| 1.2      | Basis und Produkt bei Topologien . . . . .      | 5         |
| 1.3      | $\sigma$ -Algebra . . . . .                     | 6         |
| 1.4      | Borel- $\sigma$ -Algebra . . . . .              | 8         |
| <b>2</b> | <b>Maße I</b>                                   | <b>11</b> |
| 2.1      | Stetige Funktionen . . . . .                    | 11        |
| 2.2      | Messbare Funktionen . . . . .                   | 12        |
| 2.3      | Definition eines Maßes . . . . .                | 14        |
| 2.4      | Nullmengen und Vollständigkeit . . . . .        | 19        |
| <b>3</b> | <b>Maße II</b>                                  | <b>21</b> |
| 3.1      | Äußeres Maß . . . . .                           | 21        |
| 3.1.1    | Das äußere Lebesgue-Maß . . . . .               | 23        |
| 3.1.2    | Äußere Hausdorff-Maße . . . . .                 | 23        |
| 3.2      | Vom äußeren Maß zum Maß . . . . .               | 28        |
| <b>4</b> | <b>Lebesgue-Maß</b>                             | <b>31</b> |
| 4.1      | Lebesgue-Maß und Borel-Mengen . . . . .         | 31        |
| 4.2      | Approximieren von außen und von innen . . . . . | 34        |
| 4.3      | Nicht alles ist Lebesgue-messbar . . . . .      | 36        |
| <b>5</b> | <b>Lebesgue-Integral</b>                        | <b>39</b> |
| 5.1      | Definition des Lebesgue-Integrals . . . . .     | 39        |
| 5.1.1    | Für einfache Funktionen . . . . .               | 39        |
| 5.1.2    | Für allgemeinere Funktionen . . . . .           | 42        |
| 5.2      | Von stetig zu integrierbar . . . . .            | 45        |
| 5.3      | Kombinationen messbarer Funktionen . . . . .    | 46        |
| 5.4      | Von integrierbar zu fast stetig . . . . .       | 48        |
| 5.5      | Eigenschaften des Lebesgue-Integrals . . . . .  | 50        |
| <b>6</b> | <b>Diverse Konvergenzarten</b>                  | <b>53</b> |
| 6.1      | Lebesgue-Klassen . . . . .                      | 53        |
| 6.2      | Konvergenz bei messbaren Funktionen . . . . .   | 54        |
| 6.3      | Egoroff's Konvergenzsatz . . . . .              | 58        |
| 6.4      | Integrale mit Werten in $[0, \infty]$ . . . . . | 59        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| <b>7</b>  | <b>Limes und Integral</b>   | <b>61</b>  |
| 7.1       | Das Lemma von Fatou . . . . .                                       | 61         |
| 7.2       | Monoton oder majorisiert . . . . .                                  | 62         |
| 7.3       | Vollständigkeit von $\mathcal{L}^1(X)$ . . . . .                    | 64         |
| 7.4       | Der Vektorraum $\mathcal{L}^p(X)$ . . . . .                         | 67         |
| 7.5       | Die Ungleichung von Hölder . . . . .                                | 67         |
| <b>8</b>  | <b>Die Lebesgue-Räume</b>   | <b>71</b>  |
| 8.1       | Der Lebesgue-Raum $\mathcal{L}^p(X)$ . . . . .                      | 71         |
| 8.2       | Der Lebesgue-Raum $\mathcal{L}^\infty(X)$ . . . . .                 | 73         |
| 8.3       | Der Lebesgue-Raum $\mathcal{L}^2(X)$ . . . . .                      | 75         |
| 8.4       | Stetige lineare Abbildungen . . . . .                               | 75         |
| 8.5       | Der Darstellungssatz von Riesz . . . . .                            | 78         |
| <b>9</b>  | <b>Berechnen der Integrale</b>                                      | <b>81</b>  |
| 9.1       | Einleitung . . . . .  | 81         |
| 9.2       | Fubini und Tonelli . . . . .  | 82         |
| 9.3       | Transformationen . . . . .  | 84         |
| 9.4       | Kugeln und Zylinder . . . . .                                       | 89         |
| <b>10</b> | <b>Mannigfaltigkeiten I</b>   | <b>93</b>  |
| 10.1      | Definition einer Mannigfaltigkeit . . . . .                         | 93         |
| 10.2      | Heuristik und Mathematik beim Integrieren . . . . .                 | 96         |
| 10.3      | Parallelepipeden in höheren Dimensionen . . . . .                   | 101        |
| 10.4      | Integral über eine Mannigfaltigkeit . . . . .                       | 102        |
| <b>11</b> | <b>Mannigfaltigkeiten II</b>  | <b>105</b> |
| 11.1      | Immersionen . . . . .   | 105        |
| 11.2      | Lokale Karten und Parametrisierungen . . . . .                      | 109        |
| 11.3      | Vektorfelder und Pfaffsche Formen . . . . .                         | 111        |
| 11.3.1    | Der Tangentialraum . . . . .  | 112        |
| 11.3.2    | Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten . . . . .                       | 113        |
| 11.3.3    | Der Kotangentialraum . . . . .                                      | 114        |
| 11.3.4    | Die Pfaffschen Formen . . . . .                                     | 115        |
| 11.4      | Die Dualität zwischen Vektorfeldern und Pfaffschen Formen . . . . . | 115        |
| <b>12</b> | <b>Multilineare Algebra</b>   | <b>117</b> |
| 12.1      | Antisymmetrische, multilineare Abbildungen . . . . .                | 117        |
| 12.2      | Das äußere Produkt . . . . .  | 120        |
| 12.3      | Ortsabhängige $k$ -Formen . . . . .                                 | 122        |
| <b>13</b> | <b>Skalarprodukt und Volumenform</b>                                | <b>125</b> |
| 13.1      | Allgemeines Skalarprodukt . . . . .                                 | 125        |
| 13.1.1    | Definition des Skalarproduktes . . . . .                            | 125        |
| 13.1.2    | Skalarprodukt für den Dualraum . . . . .                            | 128        |
| 13.1.3    | Volumenform und Orientierung . . . . .                              | 129        |
| 13.1.4    | Hodge-Operator . . . . .  | 132        |
| 13.2      | Wieso? . . . . .  | 134        |
| 13.3      | Gradient, Divergenz und Rotation in $\mathbb{R}^n$ . . . . .        | 135        |
| 13.4      | Die klassischen Sätze von Gauß und Stokes . . . . .                 | 135        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>14 Differentialformen</b>                                | <b>139</b> |
| 14.1 Differentialformen zurückziehen und ableiten . . . . . | 139        |
| 14.1.1 Funktionen auf Differentialformen . . . . .          | 139        |
| 14.1.2 Differentialformen differenzieren . . . . .          | 140        |
| 14.2 Geschlossene und exakte Differentialformen . . . . .   | 142        |
| 14.3 Standardvolumen . . . . .                              | 144        |
| 14.4 Integration von Differentialformen . . . . .           | 145        |
| 14.5 Bedeutung des Integrals . . . . .                      | 146        |
| 14.6 Grad, Div und Rot auf Mannigfaltigkeiten . . . . .     | 150        |
| <br>  |            |
| <b>15 Gauß und Stokes</b>                                   | <b>153</b> |
| 15.1 Integrale und Randintegrale . . . . .                  | 153        |
| 15.2 Beweis des Stokesschen Satzes . . . . .                | 155        |
| 15.3 Beweis des Integralsatzes von Gauß . . . . .           | 156        |
| 15.4 Beweis des klassischen Stokesschen Satzes . . . . .    | 158        |



# Analysis 3, Woche 1

## Teilmengen und Strukturen



### 1.1 Topologie, Metrik und Norm

**Definition 1.1** Sei  $X$  irgendeine Menge. Die Menge aller Teilmengen von  $X$  nennt man **Potenzmenge**, wir schreiben  $\mathcal{P}(X)$ :

$$\mathcal{P}(X) = \{A; A \subset X\}.$$

Wenn  $X$  genau  $n \in \mathbb{N}$  Elemente hat, hat  $\mathcal{P}(X)$  genau  $2^n$  Elemente.

**Beispiel 1.2** Für  $X = \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\}$  hat man

$$\mathcal{P}(X) = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \{\clubsuit\}, \{\diamond\}, \{\heartsuit\}, \{\spadesuit\}, \{\clubsuit, \diamond\}, \{\clubsuit, \heartsuit\}, \{\clubsuit, \spadesuit\}, \{\diamond, \heartsuit\}, \{\diamond, \spadesuit\}, \\ \{\heartsuit, \spadesuit\}, \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit\}, \{\clubsuit, \diamond, \spadesuit\}, \{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}, \{\diamond, \heartsuit, \spadesuit\}, \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\} \end{array} \right\}$$

**Bemerkung 1.2.1** Für  $X$  eine beliebige Menge schreibt man  $\{0, 1\}^X$  für die Menge aller Abbildungen von  $X$  nach  $\{0, 1\}$ . Es gibt eine direkte Bijektion zwischen  $\mathcal{P}(X)$  und  $\{0, 1\}^X$ , nämlich:

$$A \rightleftharpoons \mathbf{1}_A.$$

Hier ist  $\mathbf{1}_A \in \{0, 1\}^X$  die Indikatorfunktion zu  $A$ :

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Bei endlichen Mengen ist  $\mathcal{P}(X)$  sehr übersichtlich. Wenn  $X$  unendlich viele Elemente hat, ist  $\mathcal{P}(X)$  im allgemeinen viel zu groß, um ohne Weiteres vernünftige Aussagen machen zu können. Dazu brauchen wir mehr Struktur.

#### 1.1.1 Topologie

Eine solche Struktur in  $\mathbb{R}^n$  bietet die Klasse der offenen Mengen. Diese offenen Mengen erfüllen die Eigenschaften einer **Topologie**. Allgemein definiert man diese wie folgt:

**Definition 1.3** Eine Teilmenge  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  heißt eine **Topologie** für  $X$ , falls

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ ,

2.  $A_i \in \mathcal{T}$  für  $i = 1, \dots, k \implies \bigcap_{1 \leq i \leq k} A_i \in \mathcal{T}$ ,  
 “der Schnitt endlich vieler gehört auch dazu”.

3.  $A_i \in \mathcal{T}$  für alle  $i \in I \implies \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$ ,  
 “die Vereinigung beliebig vieler gehört auch dazu”.

**Bemerkung 1.3.1** Mit  $\{A_i; i \in I\}$  ist eine beliebige Teilmenge von  $\mathcal{T}$  gemeint.  $I$  heißt *Indexmenge*.

**Bemerkung 1.3.2**  $X$  mit der Struktur  $\mathcal{T}$ , also  $(X, \mathcal{T})$ , nennt man einen **topologischen Raum**. Die Elemente von  $\mathcal{T}$  nennt man die  **$\mathcal{T}$ -offenen Mengen**.

Man sollte sich überlegen, wieso die üblichen offenen Mengen in  $\mathbb{R}^n$  diese Eigenschaften erfüllen. Diese Topologie auf  $\mathbb{R}^n$  nennt man die **Standardtopologie** auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Bemerkung 1.3.3** Für jede Menge  $X \neq \emptyset$  gibt es zwei triviale Topologien:  $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$  und  $\mathcal{T}_2 = \mathcal{P}(X)$ .

## 1.1.2 Metrik

Eine verwandte Struktur bietet auch die folgende Verallgemeinerung von Distanz:

**Definition 1.4** Sei  $X$  eine Menge. Dann heißt eine Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  eine **Metrik**, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1.  $d(x, y) \geq 0$  für alle  $x, y \in X$ ;
2.  $d(x, y) = 0$  dann und nur dann, wenn  $x = y$ ;
3.  $d(x, y) = d(y, x)$  für alle  $x, y \in X$ ;
4.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  für alle  $x, y, z \in X$ .

**Bemerkung 1.4.1**  $(X, d)$  nennt man einen **metrischen Raum**.

**Lemma 1.5** Wenn  $(X, +, \mathbb{K}, \cdot)$  ein normierter Vektorraum ist mit Norm  $\|\cdot\|$ , dann ist die Abbildung  $d$ , definiert durch  $d(x, y) = \|x - y\|$  eine Metrik für  $X$ , d.h.  $(X, d)$  ist ein metrischer Raum.

**Bemerkung 1.5.1** In  $\mathbb{R}^n$  ist die Euklidische Distanz, also

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2},$$

die **Standardmetrik**.

**Beweis.** Weil  $\|x\| \geq 0$  gilt für alle  $x \in X$ , folgt  $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$  für alle  $x, y \in X$ . Die Aussage  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ist identisch zu  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ . Es folgt aus

$$\|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\|,$$

dass  $d(x, y) = d(y, x)$ . Und schlussendlich liefert die Dreiecksungleichung, dass

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

■



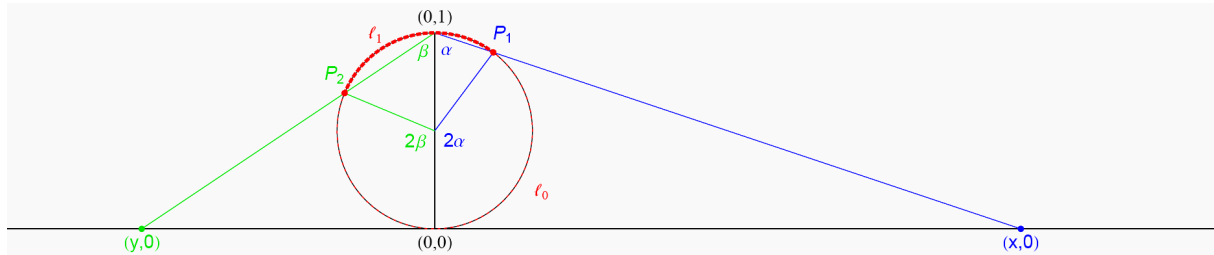
**Beispiel 1.6** Die Funktion  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ , definiert durch

$$d(x, y) = \min(|\arctan(x) - \arctan(y)|, \pi - |\arctan(x) - \arctan(y)|),$$

ist auch eine Metrik auf  $\mathbb{R}$ . Betragsmäßig große  $x$  und  $y$  sind sich nun sehr nah. Zum Beispiel gilt

$$d(100, -200) = 0.01499\dots$$

Um sich diese Metrik vorzustellen, werden die Geraden  $[(x, 0), (0, 1)]$  und  $[(y, 0), (0, 1)]$  betrachtet. Wir nehmen den Kreis mit Radius  $\frac{1}{2}$  und Mittelpunkt  $(0, \frac{1}{2})$  und betrachten die Schnittstellen  $P_1$  und  $P_2$  mit den eben genannten Geraden. Dann ist  $d(x, y)$  die Länge der kürzesten Verbindung über den Kreis zwischen  $P_1$  und  $P_2$ .



Für  $\alpha = \arctan(x)$  und  $\beta = \arctan(y)$  und hat das Zweibein  $(0, 0), (0, \frac{1}{2}), P_1$  den Winkel  $2\alpha$  und ähnlich hat das Zweibein  $(0, 0), (0, \frac{1}{2}), P_2$  den Winkel  $2\beta$ . Die Winkel werden rechts herum gemessen (in diesem Bild ist  $\beta$  negativ). Weil der Kreis den Radius  $\frac{1}{2}$  hat, hat die Verbindung, die nicht durch  $(0, 1)$  geht, die Länge  $\ell_0 = \frac{1}{2} |2\alpha - 2\beta|$ , und die Verbindung durch  $(0, 1)$  hat die Länge  $\ell_1 = \frac{1}{2} (2\pi - |2\alpha - 2\beta|)$ . Es folgt  $d(x, y) = \min(\ell_0, \ell_1)$ .

### 1.1.3 Zusammenhang

In einem metrischen Raum  $(X, d)$  kann man für jedes Element  $x \in X$  Umgebungen  $U_r(x)$  für  $r \in \mathbb{R}^+$  definieren durch

$$U_r(x) = \{y \in X; d(x, y) < r\}.$$

Allgemein nennt man  $U$  eine Umgebung von  $x$ , wenn es  $U_r(x)$  mit  $r > 0$  gibt derart, dass  $U_r(x) \subset U$ .

**Lemma 1.7** Wenn  $(X, d)$  ein metrischer Raum ist, dann ist

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(X); \forall a \in A \exists r \in \mathbb{R}^+ U_r(a) \subset A\} \quad (1.1)$$

eine Topologie für  $X$ , d.h.  $(X, \mathcal{T})$  ist ein topologischer Raum.

**Beweis.** Wir zeigen, dass die Bedingungen von Definition 1.3 erfüllt sind.

1. Weil  $\emptyset$  leer ist, gilt alles für jedes Element und es folgt, dass  $\emptyset \in \mathcal{T}$ . Weil jede Umgebung von jeder Stelle  $a$  innerhalb  $X$  liegt, folgt auch  $X \in \mathcal{T}$ .
2. Seien  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{T}$  und schreibe  $A = \bigcap_{1 \leq i \leq k} A_i$ . Für  $a \in A$  gilt, dass  $a \in A_i$  für jedes  $i$  und dann gibt es  $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}^+$  mit  $d(x, a) < r_i \Rightarrow x \in A_i$ . Wenn  $d(x, a) < r := \min_{1 \leq i \leq k} r_i$  dann gilt  $x \in \bigcap_{1 \leq i \leq k} A_i = A$ . Man bemerke, dass  $r > 0$  gilt, weil es nur endlich viele  $r_i$  gibt. Also folgt  $A \in \mathcal{T}$ .

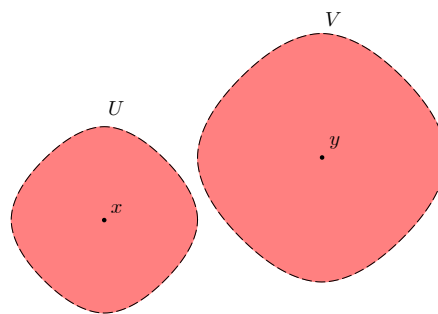
3. Sei  $\{A_i; i \in I\} \subset \mathcal{T}$  und sei  $B = \bigcup_{i \in I} A_i$ . Für  $a \in B$  gibt es ein  $i \in I$  mit  $a \in A_i$ . Für  $x$  mit  $d(x, a) < r_i$  gilt  $x \in A_i \subset B$ . ■

Die Zusammenhänge in Kurzfassung:

**Norm  $\longrightarrow$  Metrik  $\longrightarrow$  Topologie**

Eine wichtige Eigenschaft wollen wir noch benennen. Sie sorgt zum Beispiel dafür, dass, wenn es einen Grenzwert gibt, dieser eindeutig ist.

**Definition 1.8** Man sagt, dass  $(X, \mathcal{T})$  die **Hausdorff-Eigenschaft** hat, wenn es für alle  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  Mengen  $U, V \in \mathcal{T}$  gibt mit  $x \in U$  und  $y \in V$  mit  $U \cap V = \emptyset$ .



**Bemerkung 1.8.1** Sei  $x \in X$ . Eine Menge  $U \in \mathcal{T}$  mit  $x \in U$  nennt man eine **Umgebung** von  $x$ .

**Proposition 1.9** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und sei  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$ . Dann gibt es Umgebungen  $U$  von  $x$  und  $V$  von  $y$  mit  $U \cap V = \emptyset$ .

**Bemerkung 1.9.1** Anders gesagt: Wenn die Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $X$  durch eine Metrik definiert ist wie in (1.1), dann hat  $(X, \mathcal{T})$  die Hausdorff-Eigenschaft.

**Beweis.** Man setze  $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$  und nehme  $U = U_\varepsilon(x)$  und  $V = U_\varepsilon(y)$ . Wenn  $z \in U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y)$ , dann gilt

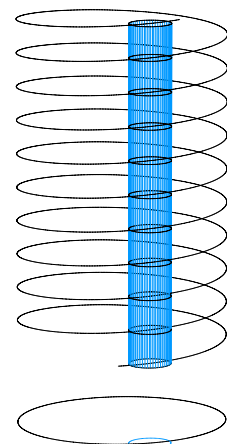
$$2\varepsilon = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \varepsilon + \varepsilon,$$

ein Widerspruch. ■

**Beispiel 1.10** Nehme  $f : \mathbb{R} \rightarrow \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$  mit  $f(x) = e^{ix}$  und definiere die Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $\mathbb{R}$  durch

$$\mathcal{T} = \{f^{-1}(A); A \subset \mathbb{C} \text{ ist offen}\}.$$

Dann hat  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  nicht die Hausdorff-Eigenschaft. Man betrachte 0 und  $2\pi$ . Diese Topologie lässt sich dann auch nicht durch eine Metrik beschreiben. Man kann sich hier  $\mathbb{R}$  vorstellen als aufgerollt in einer vertikalen Spirale und jedes  $T \in \mathcal{T}$  als Teil der Spirale innerhalb einer Säule, die sich projizieren lässt auf eine offene Menge in  $\mathbb{C}$ . Anders gesagt,  $\mathcal{T}$  ist die Menge der  $2\pi$ -periodischen offenen Mengen.



## 1.2 Basis und Produkt bei Topologien

In  $\mathbb{R}^n$  haben wir die Standardtopologie eingeführt mit Hilfe offener Kugeln. Man hat nicht nur die offenen Mengen damit definiert, sondern jede offene Menge  $U$  kann man auch schreiben als Vereinigung von Kugeln. Das kann man auch allgemeiner machen.

**Definition 1.11** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Man nennt  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$  eine **Basis** für die Topologie  $\mathcal{T}$ , wenn es für jedes  $T \in \mathcal{T}$  Basiselemente  $\{B_i \in \mathcal{B}; i \in I\}$  derart gibt, dass  $T = \bigcup_{i \in I} B_i$ .

Die offenen Intervalle bilden eine Basis für die Standardtopologie auf  $\mathbb{R}$ ; die offenen Kugeln bilden eine Basis für  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemma 1.12** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und sei  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ . Wenn es zu jedem  $x \in X$  und jedem  $T \in \mathcal{T}$  mit  $x \in T$  ein Element  $B \in \mathcal{B}$  gibt mit  $x \in B \subset T$ , dann ist  $\mathcal{B}$  eine Basis für die Topologie  $\mathcal{T}$ ,

**Beweis.** Sei  $T \in \mathcal{T}$ . Für  $x \in T$  gibt es  $B_x \in \mathcal{B}$  mit  $x \in B_x \subset T$ . Dann gilt  $T = \bigcup_{x \in T} B_x$ . ■

**Definition 1.13** Seien  $(X_1, \mathcal{T}_1)$  und  $(X_2, \mathcal{T}_2)$  topologische Räume. Dann definiert man die **Produkttopologie** auf  $X_1 \times X_2$  als die kleinste Topologie  $\mathcal{T}$ , die alle Mengen  $T_1 \times T_2$  für  $T_1 \in \mathcal{T}_1$  und  $T_2 \in \mathcal{T}_2$  enthält. Man schreibt  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ .

**Bemerkung 1.13.1** Die Produkttopologie  $\mathcal{T}$  enthält mehr als nur

$$T_1 \times T_2 = \{(x, y); x \in T_1 \text{ und } y \in T_2\}$$

mit  $T_1 \in \mathcal{T}_1$  und  $T_2 \in \mathcal{T}_2$ . Siehe Abbildung 1.1. Man kann aber zeigen, dass

$$\{T_1 \times T_2; T_1 \in \mathcal{T}_1 \text{ und } T_2 \in \mathcal{T}_2\}$$

eine Basis bildet für  $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ .

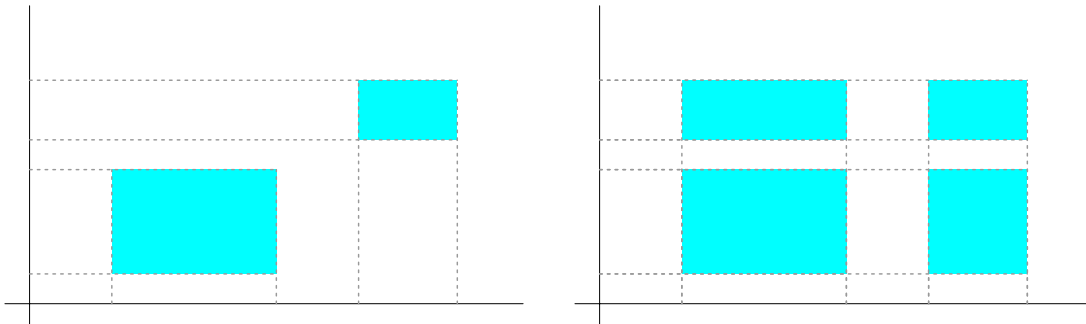


Abbildung 1.1: Links steht eine Darstellung von  $(T_{1,a} \times T_{2,a}) \cup (T_{1,b} \times T_{2,b})$ . Eine solche Menge ist nur selten ein Produkt. Rechts steht eine Darstellung vom kleinsten Produkt, das diese erste Menge enthält, nämlich  $(T_{1,a} \cup T_{1,b}) \times (T_{2,a} \cup T_{2,b})$ .

**Bemerkung 1.13.2** Hat man eine Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $X_1 \times X_2$ , dann kann man auch eine Topologie auf  $X_1$  (und ebenso auch auf  $X_2$ ) definieren, nämlich durch

$$\mathcal{T}_1 = \{T_1 \in \mathcal{P}(X_1); T_1 \times X_2 \in \mathcal{T}\}.$$

**Lemma 1.14** Seien  $\mathcal{T}_n$  und  $\mathcal{T}_m$  die Standardtopologien auf  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$ . Die Standardtopologie auf  $\mathbb{R}^{n+m} := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  ist die Produkttopologie von  $\mathcal{T}_n$  und  $\mathcal{T}_m$ .

Der Beweis dieses Lemmas verwendet Lemma 1.12 und dass für  $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$  und  $r > 0$  gilt

$$B_r^{(n+m)}(x, y) \subset B_r^{(n)}(x) \times B_r^{(m)}(y) \subset B_{\sqrt{2}r}^{(n+m)}(x, y).$$

### 1.3 $\sigma$ -Algebra

Eine zweite Struktur für Teilmengen in  $\mathcal{P}(X)$  ist folgende:

**Definition 1.15** Eine Klasse  $\mathcal{A}$  von Teilmengen aus  $X$ , also  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ , heißt eine  $\sigma$ -Algebra über  $X$ , falls

1.  $X \in \mathcal{A}$ ,
2.  $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$ ,
3.  $A_k \in \mathcal{A}$  für alle  $k \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$ .

**Bemerkung 1.15.1** Die Mengen in  $\mathcal{A}$  nennt man  $\mathcal{A}$ -messbar.  $(X, \mathcal{A})$  nennt man einen messbaren Raum.

**Bemerkung 1.15.2** Wenn  $A_k \in \mathcal{A}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , dann gilt wegen der zweiten Bedingung, dass auch  $A_k^c \in \mathcal{A}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Weil

$$\left( \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \right)^c = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k^c \in \mathcal{A}$$

gilt wiederum wegen dieser zweiten Bedingung, dass  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$ .

Eine  $\sigma$ -Algebra ist abgeschlossen unter allen abzählbaren Mengenoperationen (Vereinigung und Schnitt).

Wir erinnern nochmals an die Begriffe „endlich“<sup>1</sup> und „abzählbar“<sup>2</sup>.

**Beispiel 1.16** 1.  $\{\mathbb{R}, \emptyset\}$  ist die kleinste  $\sigma$ -Algebra über  $\mathbb{R}$ .

2. Sei  $A \subset \mathbb{R}$ . Dann ist  $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \mathbb{R} \setminus A, \mathbb{R}\}$  eine  $\sigma$ -Algebra über  $\mathbb{R}$ .

3. Definiere für  $f \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  die Menge

$$A_f := \bigcup_{k \in \mathbb{Z} \text{ mit } f(k)=1} (k, k+1].$$

Dann ist  $\mathcal{A} = \{A_f; f \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}\}$  eine  $\sigma$ -Algebra über  $\mathbb{R}$ .

4.  $\mathcal{P}(X)$  ist die größte  $\sigma$ -Algebra über  $X$ .

**Lemma 1.17** Sei  $\mathcal{B}$  eine Teilmenge von  $\mathcal{P}(X)$ . Dann kann man wie folgt die kleinste  $\sigma$ -Algebra definieren, die  $\mathcal{B}$  enthält:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}} = \bigcap \{ \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X); \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \text{ und } \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra über } X \}. \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>Eine Menge  $A$  heißt endlich, wenn es  $k \in \mathbb{N}$  gibt derart, dass  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ .

<sup>2</sup>Eine Menge  $A$  heißt abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  gibt, also dass  $A = f(\mathbb{N})$ . Es ist dann noch möglich, dass  $A$  endlich viele Elemente hat. Wenn es eine bijektive Abbildung  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  gibt, dann ist  $A$  abzählbar unendlich.

**Beweis.** Anders gesagt; sei  $\mathcal{M}$  die Menge aller  $\sigma$ -Algebren über  $X$  und man setzt

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}} = \bigcap \{ \mathcal{A} \in \mathcal{M}; \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \}.$$

Man soll zeigen, dass so eine kleinste  $\sigma$ -Algebra existiert. Weil  $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{M}$  gilt, ist  $\mathcal{M}$  nicht leer und die Menge  $\mathcal{A}_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{P}(X)$  ist wohldefiniert. Außerdem gilt für  $B \in \mathcal{B}$ , dass  $B \in \bigcap \{ \mathcal{A} \in \mathcal{M}; \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \}$ . Also gilt  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ .

Wir zeigen nun, dass  $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist. 1) Weil  $\emptyset, X \in \mathcal{A}$  für jede  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ , gilt  $\emptyset, X \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ . 2) Nehme  $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ . Dann gilt  $A \in \mathcal{A}$  für jede  $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$  mit  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ , also auch  $A^c \in \mathcal{A}$  für solche  $\mathcal{A}$  und  $A^c \in \bigcap \{ \mathcal{A} \in \mathcal{M}; \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \}$ . 3) Ähnlich kontrolliert man, dass die dritte Bedingung erfüllt ist. Also ist  $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$  eine wohldefinierte  $\sigma$ -Algebra und aus der Art der Definition folgt, dass sie die kleinste ist. ■

**Definition 1.18** Seien  $(X_1, \mathcal{A}_1)$  und  $(X_2, \mathcal{A}_2)$  messbare Räume. Dann definiert man die **Produkt- $\sigma$ -Algebra** auf  $X_1 \times X_2$  als die kleinste  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$ , die alle Mengen  $A_1 \times A_2$  mit  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  und  $A_2 \in \mathcal{A}_2$  enthält. Man schreibt

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2.$$

**Bemerkung 1.18.1** Ähnlich wie bei der Produkttopologie enthält die Produkt- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  mehr als nur

$$A_1 \times A_2 = \{ (x_1, x_2); x_1 \in A_1 \text{ und } x_2 \in A_2 \}$$

mit  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  und  $A_2 \in \mathcal{A}_2$ .

**Theorem 1.19** Seien  $(X_1, \mathcal{A}_1)$  und  $(X_2, \mathcal{A}_2)$  messbare Räume und sei  $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ . Dann gilt

- für  $x_2 \in X_2$ , dass  $S_1(x_2, A) := \{ x_1; (x_1, x_2) \in A \} \in \mathcal{A}_1$  und
- für  $x_1 \in X_1$ , dass  $S_2(x_1, A) := \{ x_2; (x_1, x_2) \in A \} \in \mathcal{A}_2$ .

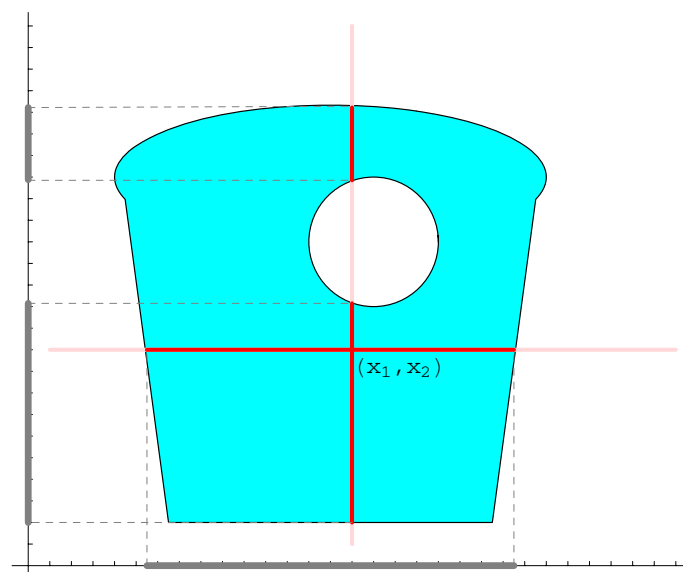


Abbildung 1.2: Für die blaue Menge findet man in grau auf der linken Achse den Schnitt  $S_1(x_2, A)$ . Unten findet man  $S_2(x_1, A)$ .

**Bemerkung 1.19.1**  $S_1(x_2, A)$  nennt man den Schnitt von  $A$  in  $X_1$  bezüglich  $x_2$ . Ähnlich nennt man  $S_2(x_1, A)$  den Schnitt von  $A$  in  $X_2$  bezüglich  $x_1$ . Siehe Abbildung 1.2.

**Beweis.** Sei  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X_1 \times X_2)$  die Menge aller Mengen  $B \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  derart, dass für alle  $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$  gilt:

$$S_1(x_2, B) \in \mathcal{A}_1 \text{ und } S_2(x_1, B) \in \mathcal{A}_2. \quad (1.3)$$

Es gilt, dass  $\mathcal{B}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist:

1.  $S_1(x_2, X_1 \times X_2) = X_1 \in \mathcal{A}_1$  und  $S_2(x_1, X_1 \times X_2) = X_2 \in \mathcal{A}_2$  liefert  $X_1 \times X_2 \in \mathcal{B}$ .
2. Weil  $S_1(x_2, B^c) = S_1(x_2, B)^c$  und  $S_2(x_1, B^c) = S_2(x_1, B)^c$  gilt, findet man

$$B \in \mathcal{B} \Rightarrow B^c \in \mathcal{B}.$$

3. Ähnlich hat man

$$\bigcup_i S_1(x_2, B_i) = S_1\left(x_2, \bigcup_i B_i\right) \text{ und } \bigcup_i S_2(x_1, B_i) = S_2\left(x_1, \bigcup_i B_i\right)$$

und damit zeigt man die dritte Bedingung von Definition 1.15.

Wir zeigen nun, dass  $\mathcal{B} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ . Aus der Definition folgt, dass  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ . Um  $\supset$  zu zeigen, nehmen wir  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  und  $A_2 \in \mathcal{A}_2$ . Dann gilt für  $B = A_1 \times A_2$ , dass

$$S_1(x_2, B) = \begin{cases} A_1 & \text{falls } x_2 \in A_2, \\ \emptyset & \text{falls } x_2 \notin A_2, \end{cases}$$

und  $S_1(x_2, B) \in \mathcal{A}_1$ . Ähnlich folgt  $S_2(x_1, B) \in \mathcal{A}_2$ . Dies bedeutet, dass  $B = A_1 \times A_2 \in \mathcal{B}$ . Weil  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra ist, die alle solche Mengen  $A_1 \times A_2$  enthält, gilt  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{B}$ . Also gilt (1.3) für alle  $B \in \mathcal{B} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  und ist das Theorem bewiesen. ■

## 1.4 Borel- $\sigma$ -Algebra

Vergleicht man also  $\sigma$ -Algebra mit Topologie, sieht einiges ähnlich aus, aber es gibt auch wesentliche Unterschiede: so sind bei einer  $\sigma$ -Algebra „mehr“ Schnitte und „weniger“ Vereinigungen erlaubt.

Die beiden Strukturen werden verknüpft in der folgenden Definition.

**Definition 1.20** Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  eine Topologie. Dann nennt man  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ , das heißt die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die  $\mathcal{T}$  enthält, die zu  $(X, \mathcal{T})$  gehörende **Borel- $\sigma$ -Algebra**.

Der Französische Mathematiker und Politiker Émile Borel lebte von 1871 bis 1956.



**Bemerkung 1.20.1** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Die zugehörige Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$  enthält u.a. alle offenen und abgeschlossenen Mengen. Die Mengen in dieser Borel- $\sigma$ -Algebra nennt man Borel-messbar.

**Bemerkung 1.20.2** *Die Standard-Borel- $\sigma$ -Algebra in  $\mathbb{R}^n$  enthält alle offene und abgeschlossene Mengen, jedoch auch alle Mengen, die entstehen durch abzählbare Vereinigungen oder Schnitte solcher Mengen. Man könnte denken, dass man so fast alle Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  bekommen würde, aber das ist ein Irrtum. Es gibt viele nicht Borel-messbare Mengen in  $\mathbb{R}^n$ . Ein konkretes Beispiel einer solchen Menge ist jedoch nicht so leicht zu definieren.*





# Analysis 3, Woche 2



## Maße I

Wir haben in Analysis 2 gesehen, dass man für beschränkte konvexe Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  einen Inhalt definieren kann. Auch für endliche Vereinigungen von solchen Teilmengen kann man den Inhalt definieren. Diese speziellen Gebiete bilden aber eine relativ kleine Klasse; man möchte dies verallgemeinern, eigentlich möchte man am liebsten einen Inhalt definieren für jedes  $A \in \mathcal{P}(X)$ . Es wird sich herausstellen, dass das zu viel verlangt ist.

Mehr als nur Vereinigungen von endlich vielen beschränkten konvexen Teilmengen ist aber möglich. Diesen verallgemeinerten Inhaltsbegriff nennt man Lebesgue-Maß. Bevor wir dieses Lebesgue-Maß betrachten, werden wir uns mit dem Begriff Maß beschäftigen. Vorher kommen noch die messbaren Funktionen und zum Vergleich auch noch die stetigen Funktionen.

### 2.1 Stetige Funktionen

Wenn  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung ist, definiert man  $f^{-1}$  durch

$$f^{-1}(y) = \{x \in X; f(x) = y\}.$$

Das heißt,  $f^{-1}(y)$  ist das Urbild von  $\{y\}$ . Man verwendet  $f^{-1}$  auch für Mengen in  $Y$ : für  $A \subset Y$  setzt man

$$f^{-1}(A) = \{x \in X; f(x) \in A\}.$$

So findet man eine Funktion

$$f^{-1} : Y \rightarrow \mathcal{P}(X) \quad \text{oder} \quad f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X).$$

Nur im Fall, dass  $f$  eine Bijektion ist, gilt  $f^{-1}(y) = \{f^{\text{inv}}(y)\}$ .

Wenn kein  $x \in X$  existiert mit  $f(x) = y$ , dann folgt  $f^{-1}(y) = \emptyset$ . Weiter gilt:

- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  und  $f^{-1}(Y) = X$ ;
- $f(f^{-1}(A)) = A$  für alle  $A \subset f(X)$ ;
- $f^{-1}(f(B)) \supset B$  für alle  $B \subset X$ .

Im Allgemeinen gilt jedoch nicht, dass  $f^{-1}(f(B))$  und  $B$  identisch sind.

**Beispiel 2.1** Für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^2$  gilt:

$$f^{-1}(f(2)) = f^{-1}(4) = \{-2, 2\} \quad \text{und} \quad f^{-1}(-4) = \emptyset,$$

$$f^{-1}(f([-1, 3])) = [-3, 3].$$

**Definition 2.2** Seien  $(X, \mathcal{S})$  und  $(Y, \mathcal{T})$  zwei topologische Räume. Dann nennt man eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$   $\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}$ -stetig, wenn für jedes  $T \in \mathcal{T}$  gilt, dass  $f^{-1}(T) \in \mathcal{S}$ .

Diese Definition stetiger Funktionen verallgemeinert die für Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$ . Für metrische Räume definiert man Stetigkeit wie folgt:  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  heißt stetig, wenn

$$\forall a \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad d_X(a, b) < \delta \implies d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon.$$

**Lemma 2.3** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und seien  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{T}$  die durch die Metriken  $d_X$  beziehungsweise  $d_Y$  definierte Topologien. Dann stimmt die klassische Definition der Stetigkeit mit der in Definition 2.2 überein.

**Beweis.** Von klassisch zu Definition 2.2 ( $\implies$ ):

Sei  $T \in \mathcal{T}$  nicht leer und sei  $a \in f^{-1}(T)$ . Weil  $T$  offen ist, gibt es  $\varepsilon > 0$  mit

$$U_\varepsilon(f(a)) := \{y \in Y; d_Y(f(a), y) < \varepsilon\} \subset T.$$

Aus der klassischen Definition der Stetigkeit folgt, dass es  $\delta > 0$  gibt mit  $f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$  für

$$U_\delta(a) := \{y \in Y; d_X(a, x) < \delta\}.$$

Es folgt  $U_\delta(a) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(a))) \subset f^{-1}(T)$ . Weil dies für beliebige  $a \in f^{-1}(T)$  gilt, bedeutet es  $f^{-1}(T) \in \mathcal{S}$ .

Die Rückwärtsrichtung ( $\impliedby$ ):

Sei  $a \in X$ ,  $\varepsilon > 0$  und betrachte  $U_\varepsilon(f(a))$ . Weil  $U_\varepsilon(f(a)) \in \mathcal{T}$  gilt, folgt aus der Annahme, dass  $f^{-1}(U_\varepsilon(f(a))) \in \mathcal{S}$ . Das heißt  $f^{-1}(U_\varepsilon(f(a)))$  ist offen, und weil  $a \in f^{-1}(U_\varepsilon(f(a)))$ , gibt es  $\delta > 0$  mit  $U_\delta(a) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(a)))$ . Anders gesagt, für jedes  $a \in X$ ,  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta > 0$  derart, dass aus  $d_X(a, x) < \delta$  folgt  $d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$ . ■

## 2.2 Messbare Funktionen

**Definition 2.4** Seien  $(X, \mathcal{A})$  und  $(Y, \mathcal{B})$  zwei messbare Räume. Dann nennt man eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar, wenn für jedes  $B \in \mathcal{B}$  gilt, dass  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ .

Dies kann man noch kürzer fassen durch  $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$ , wenn man

$$f^{-1}(\mathcal{S}) = \{f^{-1}(S); S \in \mathcal{S}\}$$

für  $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$  definiert, das heißt,  $f^{-1}(\mathcal{S})$  als Menge von Teilmengen in  $\mathcal{P}(X)$ .

**Beispiel 2.5** Betrachte  $\mathbb{R}$  mit der Standard-Borel- $\sigma$ -Algebra. Dann ist die Treppenfunktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$f(x) = \lfloor x \rfloor := \max \{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$$

messbar. Siehe Abbildung 2.1. Dies zu zeigen ist nicht so direkt. Für offene Intervalle kann man jedoch leicht zeigen, dass das Urbild eines offenen Intervalls eine Borel-Menge ist. Für  $a < b$  gilt

$$f^{-1}((a, b)) = f^{-1}(\{n \in \mathbb{Z}; \lfloor a \rfloor + 1 \leq n \leq \lfloor b \rfloor\}) = [\lfloor a \rfloor + 1, \lfloor b \rfloor + 1),$$

und dies ist eine Borel-Menge, weil  $[n, m) = (n - 1, m) \setminus (n - 1, n)$  für  $n < m$ . Vereinigt man beliebig viele offene Intervalle, ist das Urbild die Vereinigung von abzählbar(!) vielen Intervallen vom Typ  $[n, m)$  mit  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

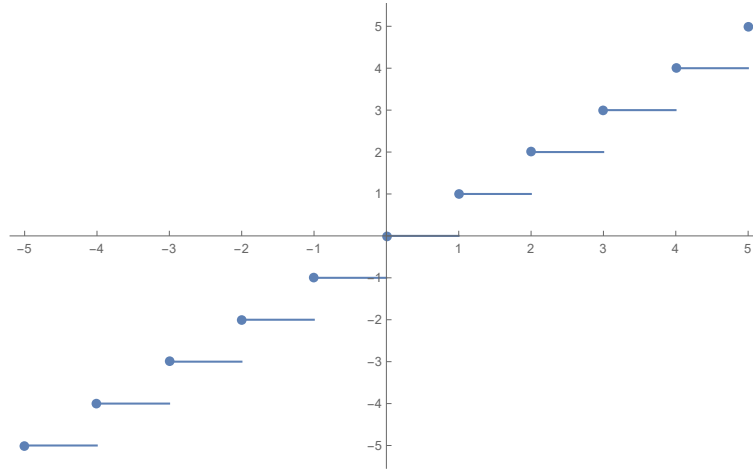


Abbildung 2.1: Die Funktion aus Beispiel 2.5

Die Funktion im Beispiel ist nicht stetig. Die Frage, ob messbare Funktionen stetig sind, wenn man die passende Topologie und  $\sigma$ -Algebra verwendet, wird in der folgenden Proposition beantwortet.

**Proposition 2.6** Seien  $(X, \mathcal{T})$  und  $(Y, \mathcal{S})$  zwei topologische Räume und sei  $f : X \rightarrow Y$   $\mathcal{T}$ - $\mathcal{S}$ -stetig. Dann ist  $f$   $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ -messbar.

Bevor wir diese Proposition beweisen, schauen wir uns die folgenden Lemmas an.

**Lemma 2.7** Sei  $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$  und sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion. Dann ist  $f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ .

**Beweis.** Diese Ergebnisse folgen direkt, wenn man sich die betreffenden Mengen anschaut.

- 1)  $\emptyset, Y \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$  liefert  $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})$  und  $X = f^{-1}(Y) \in f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})$ .
- 2)  $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$  liefert  $A^c \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$  und

$$f^{-1}(A^c) = \{x \in X; f(x) \in A^c\} = \{x \in X; f(x) \in A\}^c = (f^{-1}(A))^c.$$

- 3) Für  $A_i \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$  gilt

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_i).$$

Also ist  $f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})$  eine  $\sigma$ -Algebra. ■

**Lemma 2.8** Sei  $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$  und sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion. Dann gilt  $f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}) = \mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})}$ .

**Beweis.** Weil  $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$  folgt  $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})$  und weil  $f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, hat man sofort

$$\mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})} \subset f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}). \quad (2.1)$$

Für die andere Richtung setzt man

$$\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{P}(Y); f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})}\}, \quad (2.2)$$

und dies impliziert, dass

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})}.$$

Für  $B \in \mathcal{S}$  gilt  $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})}$  und es folgt, dass  $B \in \mathcal{B}$ . Also gilt  $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ .

Wir behaupten, dass schon  $\mathcal{B}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist. Weil  $f^{-1}(\emptyset), f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})}$  folgt  $\emptyset, Y \in \mathcal{B}$ . Wenn  $B \in \mathcal{B}$ , dann folgt  $B^c \in \mathcal{B}$  aus

$$f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c \in \mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})}.$$

Wenn  $B_i \in \mathcal{B}$  für  $i \in \mathbb{N}$ , dann folgt  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{B}$  aus

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})}.$$

Also ist  $\mathcal{B}$  eine  $\sigma$ -Algebra. Weil  $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$  und weil  $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra ist mit  $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ , folgt  $\mathcal{A}_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{B}$  und

$$f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}) \subset f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})}. \quad (2.3)$$

Zusammen zeigen (2.1) und (2.3) das gewünschte Ergebnis.  $\blacksquare$

**Beweis von Proposition 2.6.** Wir sollen zeigen, dass wenn  $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{T}$  gilt, auch  $f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}) \subset \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$  gilt. Mit Hilfe von Lemma 2.7 und 2.8 folgt  $f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}) = \mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ .  $\blacksquare$

## 2.3 Definition eines Maßes

**Definition 2.9** Sei  $(X, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum. Dann heißt  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  ein (positives) **Maß**, wenn

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
2.  $\mu$  ist  $\sigma$ -**additiv**: für jede paarweise disjunkte<sup>1</sup> Folge  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

**Bemerkung 2.9.1**  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  nennt man einen **Maßraum**.

**Bemerkung 2.9.2** Wenn außerdem  $\mu(X) < \infty$ , dann nennt man das Maß  $\mu$  endlich. Wenn  $\mu(X) = 1$ , nennt man  $\mu$  ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**.

**Bemerkung 2.9.3** Weil  $\mu \geq 0$  ist, ist die Reihe  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$  auch unbedingt konvergent, wenn sie konvergiert. Unbedingt konvergent heisst, dass man die Folge umordnen kann, ohne dass sich das Ergebnis ändert: für  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine Bijektion, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M \mu(A_{\sigma(n)}).$$

**Bemerkung 2.9.4** Man nennt eine Mengenfunktion  $\mu$  **additiv**, wenn für jede paarweise disjunkte  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$  gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^k A_n\right) = \sum_{n=1}^k \mu(A_n).$$

$\sigma$ -Additivität impliziert Additivität.

<sup>1</sup>Sei  $A_i \in \mathcal{P}(X)$  für  $i \in I$ . Dann heißt  $\{A_i\}_{i \in I}$  paarweise disjunkt, wenn  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für alle  $i, j \in I$  mit  $i \neq j$ .

Diese Definition vom Maß liefert die folgenden Eigenschaften:

**Theorem 2.10** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Dann gilt für  $A, B, A_i \in \mathcal{A}$ :

1.  $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$ ;
2.  $\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ ;
3. wenn  $A_n \subset A_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann ist  $\{\mu(A_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine wachsende Folge<sup>2</sup> und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right);$$

4. wenn  $A_n \supset A_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mu(A_0) < \infty$ , dann ist  $\{\mu(A_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine fallende Folge und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right).$$

**Bemerkung 2.10.1** Die vierte Aussage braucht eine Bedingung wie  $\mu(A_0) < \infty$  (es reicht  $\mu(A_{k_0}) < \infty$  für irgendein  $k_0$ ). Denn es ist möglich, dass sowohl  $\mu(A_k) = \infty$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  als auch  $\mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = 0$  gilt.

Ein solches Beispiel findet man in  $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), Z)$  mit  $Z$  das Zählmaß. Dieses Zählmaß wird definiert durch

$$Z(A) = \begin{cases} n & \text{falls } A \text{ genau } n \text{ Elemente enthält,} \\ \infty & \text{falls } A \text{ unendlich viele Elemente enthält.} \end{cases}$$

Betrachtet man  $A_k = 2^k \mathbb{Z} = \{n2^k; n \in \mathbb{Z}\}$ , so findet man  $A_k \supset A_{k+1}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$Z(A_k) = \infty \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } Z\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = Z(\{0\}) = 1.$$

**Beweis.** 1) Weil  $B = A \cup (B \cap A^c)$  und  $A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$  gilt, folgt aus der Additivität, dass

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \cap A^c) \geq \mu(A).$$

- 2) Man bemerke, dass  $A \cup B = (A \cap B^c) \cup B$  und  $(A \cap B^c) \cap B = \emptyset$ . Dann gilt

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \cap B^c) + \mu(B).$$

Weil  $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$  gilt, hat man auch

$$\mu(A \cap B^c) + \mu(A \cap B) = \mu(A).$$

Es folgt, dass

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B^c) + \mu(A \cap B) = \mu(A \cap B^c) + \mu(B) + \mu(A).$$

---

<sup>2</sup>Man erlaubt hier Grenzwerte in  $[0, \infty]$ . Für  $\ell = \infty$  definiert man den uneigentlichen Limes wie folgt: Man sagt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , wenn

$$\forall R > 0 \exists N_R \in \mathbb{N} : n > N_R \implies a_n > R.$$

Wenn  $\mu(A \cap B^c) = \infty$ , dann gilt auch  $\mu(A \cup B) = \infty = \mu(A)$ , und es steht auf beiden Seiten  $\infty$ . Wenn  $\mu(A \cap B^c) < \infty$ , dann bekommt man

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(B) + \mu(A).$$

3) Weil 1) gilt, findet man, dass die Folge wachsend ist. Setzt man  $\tilde{A}_0 = A_0$  und  $\tilde{A}_k = A_k \cap A_{k-1}^c$  für  $k \geq 1$ , dann ist  $\{\tilde{A}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine disjunkte Folge und es gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \tilde{A}_k\right) \stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \mu(\tilde{A}_k) \stackrel{(\diamond)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=0}^n \tilde{A}_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

In  $\stackrel{(*)}{=}$  verwendet man die  $\sigma$ -Additivität und in  $\stackrel{(\diamond)}{=}$  die daraus folgende Additivität.

4) Man findet, weil 1) gilt, dass die Folge fallend ist. Dann folgt  $\mu(A_k) \leq \mu(A_0) < \infty$  und  $\{\mu(A_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine fallende nach unten (durch 0) beschränkte Folge und deshalb konvergent. Weil

$$\mu(A_0 \cap A_k^c) + \mu(A_k) = \mu(A_0 \cap A_k^c) + \mu(A_0 \cap A_k) = \mu(A_0)$$

gilt und  $\mu(A_k)$  endlich ist, folgt

$$\mu(A_0 \cap A_k^c) = \mu(A_0) - \mu(A_k). \quad (2.4)$$

Jetzt definiert man  $B_k = A_0 \cap A_k^c$  und wendet 3) an. Es gilt  $A_k^c \subset A_{k+1}^c$  und also auch

$$B_k = (A_0 \cap A_k^c) \subset (A_0 \cap A_{k+1}^c) = B_{k+1}.$$

Weil

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = A_0 \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k^c = A_0 \cap \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right)^c$$

gilt, bekommt man

$$\begin{aligned} \mu(A_0) &= \mu\left(A_0 \cap \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right)^c\right) + \mu\left(A_0 \cap \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right)\right) = \\ &= \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k\right) + \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \\ &\quad \text{(man verwende 3.)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k) + \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_0 \cap A_k^c) + \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \\ &\quad \text{(man verwende (2.4))} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu(A_0) - \mu(A_k)) + \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \\ &\quad \text{(der Limes existiert in } [0, \infty)) \\ &= \mu(A_0) - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) + \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right). \end{aligned}$$

Weil  $\mu(A_0) < \infty$  folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right).$$

■

**Beispiel 2.11** Sei  $a \in \mathbb{R}$  und definiere den Maßraum  $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \delta_a)$  durch

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \in A, \\ 0 & \text{falls } a \notin A. \end{cases}$$

Dieses Maß nennt man das Dirac-Maß mit Träger in  $a$ .

**Beispiel 2.12** In Analysis 2 haben wir gezeigt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Man findet, dass für  $g_{\alpha,y}(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{\alpha^2}}$  gilt  $\int_{-\infty}^{\infty} g_{\alpha,y}(x) dx = 1$ . Für die offenen Intervalle  $(a, b)$  definiert man

$$\mu_{\alpha,y}((a, b)) = \int_a^b g_{\alpha,y}(x) dx.$$

Für jedes  $\alpha > 0$  und  $y \in \mathbb{R}$  folgt, dass  $\mu_{\alpha,y}(\mathbb{R}) = 1$ . Außerdem gilt

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \mu_{\alpha,y}((a, b)) = \delta_y((a, b)).$$

Wir werden noch zeigen, dass man  $\mu_{\alpha,y}$  erweitern kann zu einem Maß auf allen Borelmengen von  $\mathbb{R}$ .

**Bemerkung 2.12.1** Die Funktion  $g_{\alpha,y}(\cdot)$  ist eine **Dichte** für das Maß  $\mu_{\alpha,y}$ . Für das Dirac-Maß existiert keine Dichtefunktion.

Die Standard-Gaußkurve  $g_{1,0}$  oder Normalverteilung bekommt man als Limes beim Dreieck von Pascal. Das heißt, wenn man eine ehrliche Münze  $n$  mal wirft, dann ist die Wahrscheinlichkeit  $m$  mal Kopf zu erhalten

$$P[m \text{ mal Kopf bei } n \text{ Würfe}] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{n}{m}.$$

Zentriert man den Graph in 0 (schiebe das Intervall  $[0, n]$  durch  $m \mapsto m - \frac{1}{2}n$  auf  $[-\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n]$ ) und skaliert man mit Faktor  $\sqrt{\frac{n}{2}}$ , genauer gesagt  $(b, h) \mapsto \left(\sqrt{\frac{2}{n}} b, \sqrt{\frac{n}{2}} h\right)$ , dann approximiert man mit den folgenden Paaren die Gaußkurve:

$$\left(\sqrt{\frac{2}{n}} \left(m - \frac{1}{2}n\right), \sqrt{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{n}{m}\right) \rightsquigarrow \left(x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\right) \quad (2.5)$$

Weil diese Konvergenz so nicht genau definiert ist, schreiben wir  $\rightsquigarrow$ . Schon genauer wäre: Sei  $x \in \mathbb{R}$  und  $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  derartig, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{n}} (m_n - \frac{1}{2}n) = x$ , dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{n}{m_n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Wir beweisen dies nicht, aber illustrieren das Ergebnis mit einigen Bildern. In Abbildung 2.2 findet man für  $n = 1, \dots, 100$  skalierte Skizzen von  $m \mapsto \binom{n}{m}$ . In der nächsten Abbildung sind drei dieser Kurven verglichen mit  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ .

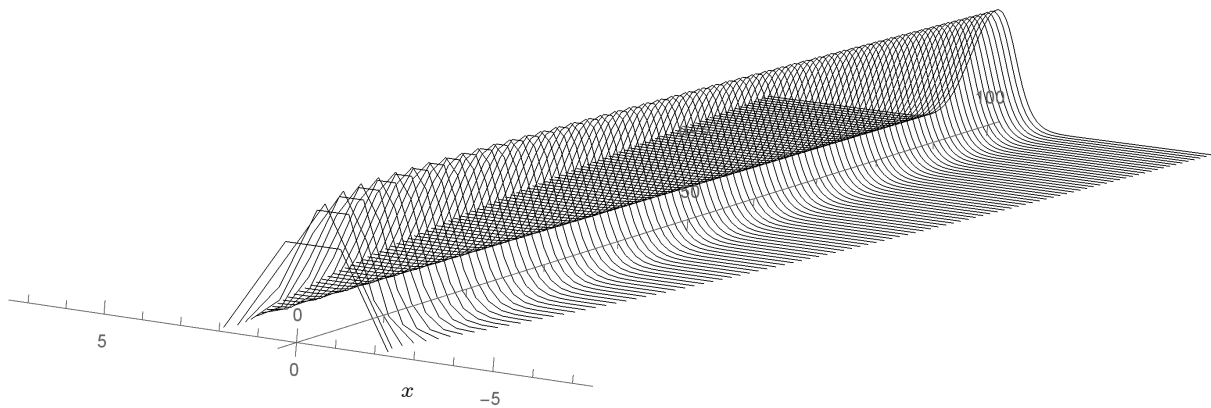


Abbildung 2.2: Von Pascal nach Gauß, die ersten 100 Kurven.

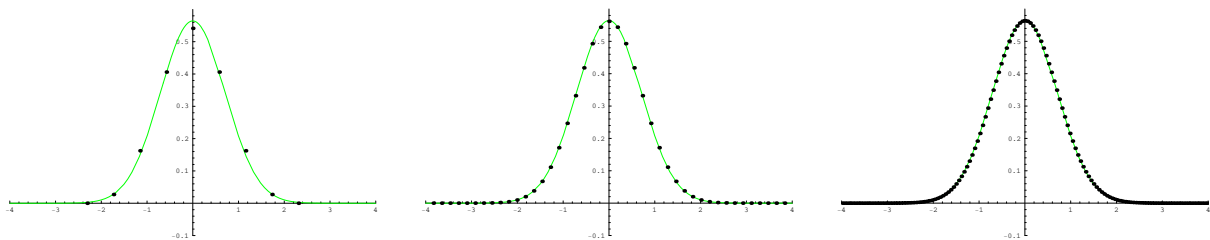


Abbildung 2.3: Die Bilder zu (2.5) für  $n = 6$ ,  $n = 60$  und  $n = 600$



Abbildung 2.4: Ein Bild zu der Dichtefunktion  $g_{1,0}$  findet man auch mitten auf der letzten 10-DM-Banknote zusammen mit Carl Friedrich Gauß



## 2.4 Nullmengen und Vollständigkeit

**Definition 2.13** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Man nennt  $A \in \mathcal{A}$  eine **Nullmenge**, wenn  $\mu(A) = 0$ . Ein Maßraum heißt **vollständig**, wenn jede Teilmenge einer Nullmenge wiederum eine Nullmenge ist.

**Lemma 2.14** Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wiederum Nullmengen.

**Beweis.** Dieses Ergebnis folgt aus der  $\sigma$ -Additivität. ■

**Theorem 2.15** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Setzt man

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup A_0; A \in \mathcal{A} \text{ und es gibt eine Nullmenge } N \in \mathcal{A} \text{ mit } A_0 \subset N\}$$

und  $\bar{\mu}(A \cup A_0) = \mu(A)$ , dann gilt

1.  $\overline{\mathcal{A}}$  ist ein  $\sigma$ -Algebra,
2.  $\bar{\mu}$  ist ein wohldefiniertes Maß, und
3.  $(X, \overline{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$  ist ein vollständiger Maßraum.

**Beweis.** 1) Weil  $\emptyset$  eine Nullmenge ist und  $A \cup \emptyset = A$  gilt, gilt  $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$ . So ist gleich die erste Bedingung einer  $\sigma$ -Algebra erfüllt. Sei  $A \in \mathcal{A}$  und  $A_0 \subset N$  mit  $N$  eine Nullmenge. Weil auch  $N \cap A_0^c \subset N$  und

$$A_0^c = (N^c \cap A_0^c) \cup (N \cap A_0^c) = N^c \cup (N \cap A_0^c)$$

folgt, dass

$$\begin{aligned} (A \cup A_0)^c &= A^c \cap A_0^c = A^c \cap (N^c \cup (N \cap A_0^c)) = \\ &= (A^c \cap N^c) \cup (A^c \cap N \cap A_0^c). \end{aligned}$$

Man hat  $A^c \cap N^c \in \mathcal{A}$  und  $A^c \cap N \cap A_0^c \subset N$ . So hat man bewiesen, dass  $(A \cup A_0)^c \in \overline{\mathcal{A}}$ . Die letzte Eigenschaft einer  $\sigma$ -Algebra folgt aus Lemma 2.14.

2) Wenn  $A \cup A_0 = B \cup B_0$  mit  $A, B \in \mathcal{A}$  und  $A_0$  und  $B_0$  Teilmengen von Nullmengen  $N$  beziehungsweise  $M$  sind, dann gilt  $A \cup N \cup M = B \cup N \cup M$ . Weil  $A^c \cap (N \cup M)$  und  $B^c \cap (N \cup M)$  Nullmengen sind, hat man

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A) + \mu(A^c \cap (N \cup M)) = \mu(A \cup N \cup M) = \\ &= \mu(B \cup N \cup M) = \mu(B) + \mu(B^c \cap (N \cup M)) = \mu(B) \end{aligned}$$

und es gilt  $\bar{\mu}(A \cup A_0) = \bar{\mu}(B \cup B_0)$ . So ist  $\bar{\mu}$  wohldefiniert. Es ist sogar ein Maß:

i)  $\emptyset$  ist eine Nullmenge und  $\bar{\mu}(\emptyset) = \bar{\mu}(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ .

ii) Für eine disjunkte Folge  $\{A_i \cup A_{0,i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $A_i \in \mathcal{A}$  und  $A_{0,i}$  Teilmenge einer Nullmenge, hat man:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cup A_{0,i})\right) &= \bar{\mu}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_{0,i}\right) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \bar{\mu}(A_i \cup A_{0,i}). \end{aligned}$$

3) Diese letzte Eigenschaft folgt aus der Definition und den ersten beiden Eigenschaften. ■



# Analysis 3, Woche 3

## Maße II



### 3.1 Äußeres Maß

Man könnte hoffen, nachdem man durch die Erweiterung von  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  zu  $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$  einen vollständigen Maßraum konstruiert hat, dass auch alle Mengen messbar sein sollten. Nimmt man  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ , dann kann man zwar immer das Zählmaß verwenden:

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{Anzahl Elemente in } A \text{ wenn endlich,} \\ \text{sonst } \infty, \end{cases}$$

aber das ist nicht besonders interessant. Hofft man für  $X = \mathbb{R}^n$  darauf, das übliche Volumen zu erweitern zu einem Maß auf  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ , dann ist diese Hoffnung vergeblich; es gibt immer noch nicht-messbare Mengen. Es ist jedoch nicht einfach, ein konkretes Beispiel für eine nicht-messbare Menge hinzuschreiben, denn eine abzählbare Konstruktion reicht nicht. Wenn es überabzählbar wird, dann braucht man im Allgemeinen das Auswahlaxiom<sup>1</sup>.

Eine Möglichkeit, um für alle Teilmengen in  $\mathcal{P}(X)$  etwas ähnliches wie ein Maß zu definieren ist folgende:

**Definition 3.1** Eine Abbildung  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  nennt man ein äußeres Maß auf  $X$ , wenn

1.  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ,
2. für alle  $A, B \in \mathcal{P}(X)$ :  $A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ , und
3.  $\mu^*$  ist  $\sigma$ -**subadditiv**: für alle  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$  gilt:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(A_i).$$

---

<sup>1</sup>**Auswahlaxiom** Wenn  $\mathcal{A}$  eine Menge nichtleerer Mengen ist, dann gibt es eine Auswahlfunktion: für alle Mengen  $A \in \mathcal{A}$  kann man ein Element  $a \in A$  bestimmen.

Anders gesagt: Sei  $X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ , dann gilt

$$\exists f : \mathcal{A} \rightarrow X \text{ mit } \forall A \in \mathcal{A}: f(A) \in A.$$

Die meisten Mathematiker nehmen dieses Axiom als Voraussetzung. In der Mathematik ist ein Axiom ein nicht deduktiv ableitbarer und widerspruchsfreier Grundsatz.

**Bemerkung 3.1.1** Bei der  $\sigma$ -Subadditivität wird nicht verlangt, wie bei der  $\sigma$ -Additivität, dass die  $A_i$  paarweise disjunkt sind. Das ist jedoch nicht der Grund, wieso  $\leq$  statt  $=$  in der Definition erscheint. Man möchte hier zulassen, dass eine strikte Ungleichung erscheinen kann, sogar bei paarweise disjunkten Mengen  $A_i$ .

Wenn man genügend Teilmengen von  $X$  hat, für die man eine „Größe“ definiert, dann lässt sich daraus ein äußeres Maß konstruieren. Genau beschrieben wird dieses Resultat im nächsten Lemma.

**Lemma 3.2** Seien  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$  und  $\nu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  derart, dass:

1.  $\emptyset \in \mathcal{B}$  und  $\nu(\emptyset) = 0$ ,
2.  $X$  kann mit abzählbar vielen  $B_i \in \mathcal{B}$  überdeckt werden:

$$\exists \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B} \text{ derart, dass } \bigcup_{i \in I} B_i = X \text{ und } I \text{ abzählbar.}$$

Dann ist  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ , definiert durch

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} \nu(B_i); B_i \in \mathcal{B} \text{ und } A \subset \bigcup_{i \in I} B_i \text{ mit } I \text{ abzählbar} \right\},$$

ein äußeres Maß auf  $X$ .

**Beweis.** Aus dieser Definition folgt gleich, dass die erste Bedingung von Definition 3.1 erfüllt ist. Denn falls  $A_1 \subset A_2$  gilt, nimmt man für  $A_2$  das Infimum über eine kleinere Klasse von  $B_i$ .

Um die  $\sigma$ -Subadditivität zu zeigen, sei  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$  und  $\varepsilon > 0$ . Weil  $\mu^*(A_n)$  als Infimum definiert ist, kann man für jedes  $n \in \mathbb{N}$  Mengen  $\{B_{n,i}\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$  finden derart, dass  $A_n \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{n,i}$  und

$$\mu^*(A_n) \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu(B_{n,i}) - 2^{-n-1}\varepsilon.$$

Bemerke, dass die  $B_{n,i}$  auch von  $\varepsilon$  abhängen. Es folgt, dass  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{n,i}$  und

$$\mu^* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu(B_{n,i}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu^*(A_n) + 2^{-n-1}\varepsilon) = \varepsilon + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

Weil diese Ungleichung gilt für alle  $\varepsilon > 0$ , gilt auch

$$\mu^* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

So ist  $\mu^*$  ein äußeres Maß. ■

### 3.1.1 Das äußere Lebesgue-Maß

Wie wir in Lemma 3.2 gesehen haben, kann man ein äußeres Maß definieren, wenn man eine Art Prämaß definiert auf genügend viele Mengen. Nehmen wir  $\mathbb{R}^n$  und die Blöcke, die wir auch schon bei der Riemann-Integrierbarkeit verwendet haben, dann folgt das äußere Lebesgue-Maß. Für  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  für  $i = 1, \dots, n$  mit  $a_i \leq b_i$  setzen wir

$$\text{Volumen}([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Wir nennen  $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  einen Block in  $\mathbb{R}^n$ .



Henri Léon Lebesgue  
1875 - 1941

**Definition 3.3** Sei  $\mathcal{B}$  die Menge aller Blöcke in  $\mathbb{R}^n$ . Wir definieren das äußere Maß  $\lambda_n^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$  durch

$$\lambda_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} \text{Volumen}(R_i); R_i \in \mathcal{B} \text{ und } A \subset \bigcup_{i \in I} R_i \text{ mit } I \text{ abzählbar} \right\};$$

$\lambda_n^*$  heißt das *n-dimensionale äußere Lebesgue-Maß* auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Bemerkung 3.3.1** Wegen Lemma 3.2 kann man folgern, dass  $\lambda_n^*$  tatsächlich ein äußeres Maß ist.

**Bemerkung 3.3.2** Man kann zeigen, dass das äußere Lebesgue-Maß invariant ist unter Verschiebungen und Drehungen.

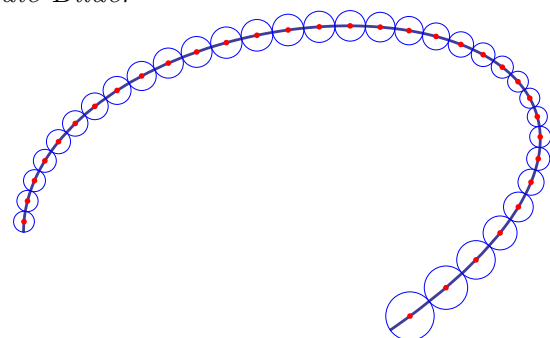
### 3.1.2 Äußere Hausdorff-Maße

Statt mit rechteckigen Blöcken eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  zu überdecken, könnte man auch Kugeln verwenden. Sei  $\sigma_n = \text{Volumen}(B_1(0))$  und sei  $B_r(y) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - y| < r\}$ . Man kann zeigen, dass

$$\lambda_n^*(A) = \sigma_n \inf \left\{ \sum_{i \in I} r_i^n; A \subset \bigcup_{i \in I} B_{r_i}(x_i) \text{ mit } I \text{ abzählbar} \right\}$$

das gleiche äußere Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^n$  liefert. Diese Idee mit Überdecken kann man auch verwenden um 1-dimensionale Mengen in  $\mathbb{R}^n$  zu messen.

**Bemerkung 3.3.3** Für Kurven, das heißt für die Bilder glatter injektiver Kurven  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  kann man die Summe der Durchmesser überdeckender Kreisscheiben oder Kugeln verwenden, um die Länge der Kurve zu approximieren. Wenn  $\bigcup_{i \in I} B_{r_i}(x_i)$  die Kurve überdeckt, ist  $\sum_{i \in I} r_i$  eine Approximation der Länge.



Nimmt man gleichgroße Kugeln, dann kann man eine glatte Kurve  $\kappa$  von Länge  $\ell$  mit  $m + 1$  Kugeln von Radius  $\varepsilon := \frac{\ell}{2m}$  überdecken, wenn  $\varepsilon$  genügend klein ist. Das würde bedeuten, dass

$$\ell = \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ m \cdot 2\varepsilon; \kappa \subset \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(x_i) \right\}.$$

Läßt man Kugeln verschiedener Größe zu, aber mit Radius kleiner gleich  $\varepsilon_0$ , dann findet man

$$\ell = \liminf_{\varepsilon_0 \downarrow 0} \left\{ \sum_{i \in I} 2\varepsilon_i; \kappa \subset \bigcup_{i \in I} B_{\varepsilon_i}(x_i) \text{ mit } \varepsilon_i \leq \varepsilon_0 \text{ und } I \text{ abzählbar} \right\}.$$

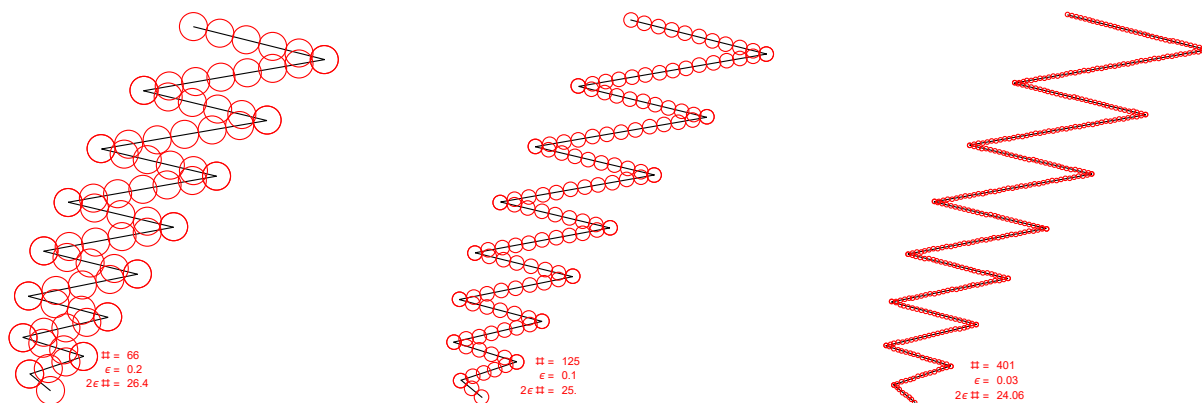


Abbildung 3.1: Wie man die Länge einer Kurve  $k$  definiert durch Überdeckungen mit Kugeln und ohne Ableitung  $k'$

Diese letzte Formel kann man auch für nicht glatte Kurven verwenden.

- Man definiert für beliebige Mengen  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ :

$$\lambda_{1\text{-dim. in } \mathbb{R}^n}^*(A) = \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ 2 \sum_{i \in I} r_i; A \subset \bigcup_{i \in I} B_{r_i}(x_i) \text{ mit } r_i < \varepsilon \text{ und } I \text{ abzählbar} \right\}. \quad (3.1)$$

Wenn  $A$  mehr als 1-dimensional ist, bekommt man  $\lambda_{1\text{-dim. in } \mathbb{R}^n}^*(A) = \infty$ .

Die gleiche Idee funktioniert auch, wenn man eine zwei-dimensionale Oberfläche in  $\mathbb{R}^n$  messen möchte.

- Hier nimmt man

$$\lambda_{2\text{-dim. in } \mathbb{R}^n}^*(A) = \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \pi \sum_{i \in I} r_i^2; A \subset \bigcup_{i \in I} B_{r_i}(x_i) \text{ mit } r_i < \varepsilon \text{ und } I \text{ abzählbar} \right\}. \quad (3.2)$$

Wenn man (3.1) und (3.2) vergleicht, dann sieht man, dass nur  $2r_i$  und  $\pi r_i^2$  verschieden sind. Die Erklärung findet man in Abbildung 3.3. Für eine  $s$ -dimensionale Menge in  $\mathbb{R}^n$  wäre es  $c_s r_i^s$  für geschickt gewählte Konstanten  $c_s$ . Man kann selber raten, wie man  $c_s$  für ganzzahlige  $s$  definiert.

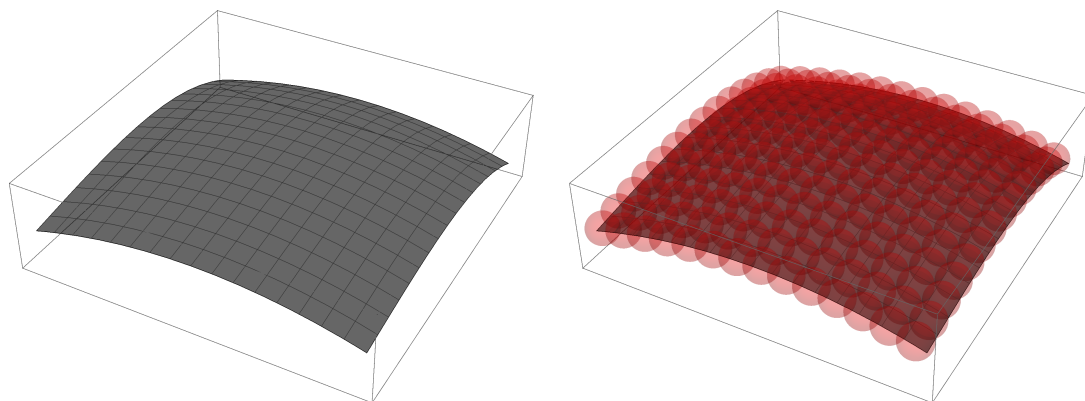


Abbildung 3.2: Wie man einen Flächeninhalt approximiert durch Überdeckungen mit Kugeln. Sparsamer wäre es, Kugeln unterschiedlicher Größe zu verwenden.

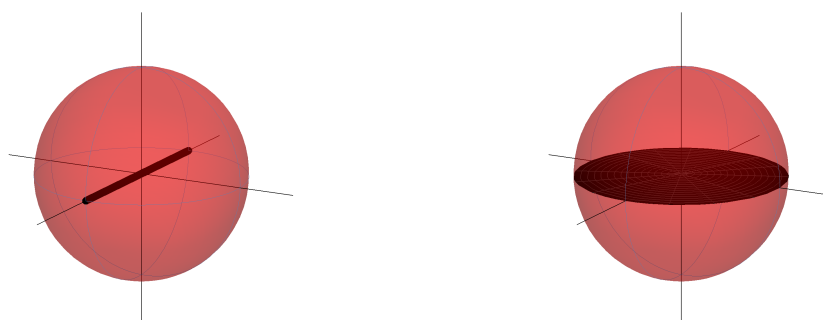


Abbildung 3.3:  $2r$  und  $\pi r^2$  sind die „Größen“, das heißt die 1- bzw. 2-dimensionalen Volumen, der schwarzen Schnittmengen

- Diese Überlegung führt zu

$$\lambda_{s\text{-dim. in } \mathbb{R}^n}^*(A) = c_s \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^s; B_{r_i}(x_i) \in \mathcal{B} \text{ und } A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{r_i}(x_i) \text{ mit } r_i < \varepsilon \right\}.$$

Auf diese Art könnte man sogar Maße für nicht-ganzzahlige Dimensionen definieren:

**Definition 3.4** Sei  $s > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  und  $\mathcal{B}_\varepsilon$  die Menge aller Kugeln in  $\mathbb{R}^n$  (inklusive die leere) mit  $r \in [0, \varepsilon]$ :

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n; \|x - y\| < r\}.$$

Wir definieren  $h_s^\varepsilon, h_s^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$  durch

$$h_s^\varepsilon(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{Radius}(B_i))^s; B_i \in \mathcal{B}_\varepsilon \text{ und } A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right\} \quad (3.3)$$

$$h_s^*(A) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} h_s^\varepsilon(A). \quad (3.4)$$

und  $h_s^*$  heißt das  **$s$ -dimensionale äußere Hausdorff<sup>2</sup>-Maß** auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Bemerkung 3.4.1** Eigentlich ist dies nicht das  $s$ -dimensionale äußere Hausdorff-Maß, sondern eine sphärische Version davon. Das übliche äußere Hausdorff-Maß verwendet mehr als nur Kugeln und für einige pathologische Mengen bringt dies einen Unterschied. Man kann jedoch zeigen, dass beide Definitionen äquivalente Maße geben.

<sup>2</sup>Felix Hausdorff, Breslau 1868 – Bonn 1942

**Bemerkung 3.4.2** Aus der Definition folgt sofort, dass

$$0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1 \implies h_s^{\varepsilon_2}(A) \geq h_s^{\varepsilon_1}(A).$$

Weil  $h_s^\varepsilon(A) \geq 0$  folgt, dass  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} h_s^\varepsilon(A)$  existiert als Grenzwert in  $[0, \infty]$ . Dann gilt auch  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} h_s^\varepsilon(A) = \sup_{\varepsilon > 0} h_s^\varepsilon(A)$ .

**Bemerkung 3.4.3** In (3.3) ist tatsächlich ein äußeres Maß definiert, denn die Klasse  $\mathcal{B}_\varepsilon$  und die Größen  $\nu_s$  mit  $\nu_s(B_r(x)) = r^s$  erfüllen die Bedingungen in Lemma 3.2. Also ist  $h_s^\varepsilon$  ein äußeres Maß für  $\varepsilon > 0$  und  $s \in (0, n]$ .

Für  $s = 0$  definiert man in (3.3)  $h_0^\varepsilon$  durch  $\nu_0(\emptyset) = 0$  und  $\nu_0(B_r(x)) = 1$  falls  $r > 0$ . Auch  $h_0^\varepsilon$  ist ein äußeres Maß;  $h_0^*$  ist das Zählmaß.

Für alle  $s \in [0, n]$  sollte man sich noch überlegen, warum  $h_s^*$  tatsächlich ein äußeres Maß ist.

**Bemerkung 3.4.4** Wenn man für ganzzahlige  $s$  und schöne Mengen die Standardinhalte wiederfinden möchte, dann muss man in (3.3) einen Faktor  $\sigma_s$  anbringen;  $\sigma_s$  ist das  $s$ -dimensionale Volumen der Einheitskugel in  $\mathbb{R}^s$ . Oft wird das Hausdorff-Maß inklusive dieses Faktors definiert. Übrigens kann man statt Kugeln auch Würfel verwenden. Den Faktor muss man wiederum anpassen.

**Beispiel 3.5** Sierpinski's Teppich. Wir nehmen eine Teilmenge  $S$  von  $[0, 1]^2$  wie folgt: Man teile das Gebiet in  $3 \times 3$  Teilquadrate und entferne das Mittlere. Man wiederholt dies auf die restlichen 8 Quadrate und setzt das fort:

$$S = [0, 1]^2 \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^n-1} \bigcup_{\ell=0}^{3^n-1} \left( \frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}} \right) \times \left( \frac{3\ell+1}{3^{n+1}}, \frac{3\ell+2}{3^{n+1}} \right).$$

Für das äußere Lebesguemaß gilt  $\lambda^*(S) = 0$ , denn in jedem Schritt der Konstruktion entfernt man  $\frac{1}{9}$  des Gebietes und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$ .

Wie sieht es aus bezüglich der Hausdorffmaße? Weil man  $S$  überdecken kann mit  $8^n$  Kugeln, die Radius  $\frac{1}{2}\sqrt{2} 3^{-n}$  haben, finden wir

$$h_s^{\sqrt{2} 3^{-n}}(S) \leq 8^n \left( \frac{1}{2}\sqrt{2} 3^{-n} \right)^s = 2^{-1/2 s} (8 3^{-s})^n.$$

Weil  $8 3^{-s} < 1$  für  $s > s_d = \frac{\log(8)}{\log(3)} = 1.8928\dots$  gilt es, dass

$$h_s^*(S) = 0 \text{ falls } s > s_d. \quad (3.5)$$

Für  $\varepsilon < 1$  folgt  $s_1 \leq s_2 \implies h_{s_1}^\varepsilon(S) \geq h_{s_2}^\varepsilon(S)$ , also auch

$$s_1 \leq s_2 \implies h_{s_1}^*(S) \geq h_{s_2}^*(S).$$

Nehmen wir an, dass  $h_s^\varepsilon(S) = C_s \in (0, \infty]$  für ein  $s < s_d$ , dann folgt aus der Selbstähnlichkeit von  $S$  ( $S$  besteht aus 8 kleineren Kopien von sich selber), dass  $h_s^{\varepsilon/3}(S) = 8 \left(\frac{1}{3}\right)^s h_s^\varepsilon(S)$ . Durch Wiederholung folgt  $h_s^{\varepsilon/3^n}(S) = (8 3^{-s})^n C_s$  und wir finden, dass

$$h_s^*(S) = \infty \text{ falls } s < s_d. \quad (3.6)$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $h_s^\varepsilon(S) > 0$ .

**Definition 3.6** Wenn es für  $S \subset \mathbb{R}^n$  eine Zahl  $s_d \in [0, n]$  gibt derart, dass (3.5) und (3.6) erfüllt sind, sagt man:  $S$  hat **Hausdorff-Dimension**  $s_d$ .

Siehe Abbildung 3.5.

Der Sierpinski Teppich hat Dimension  $s_d(S) = \frac{\log(8)}{\log(3)}$ .



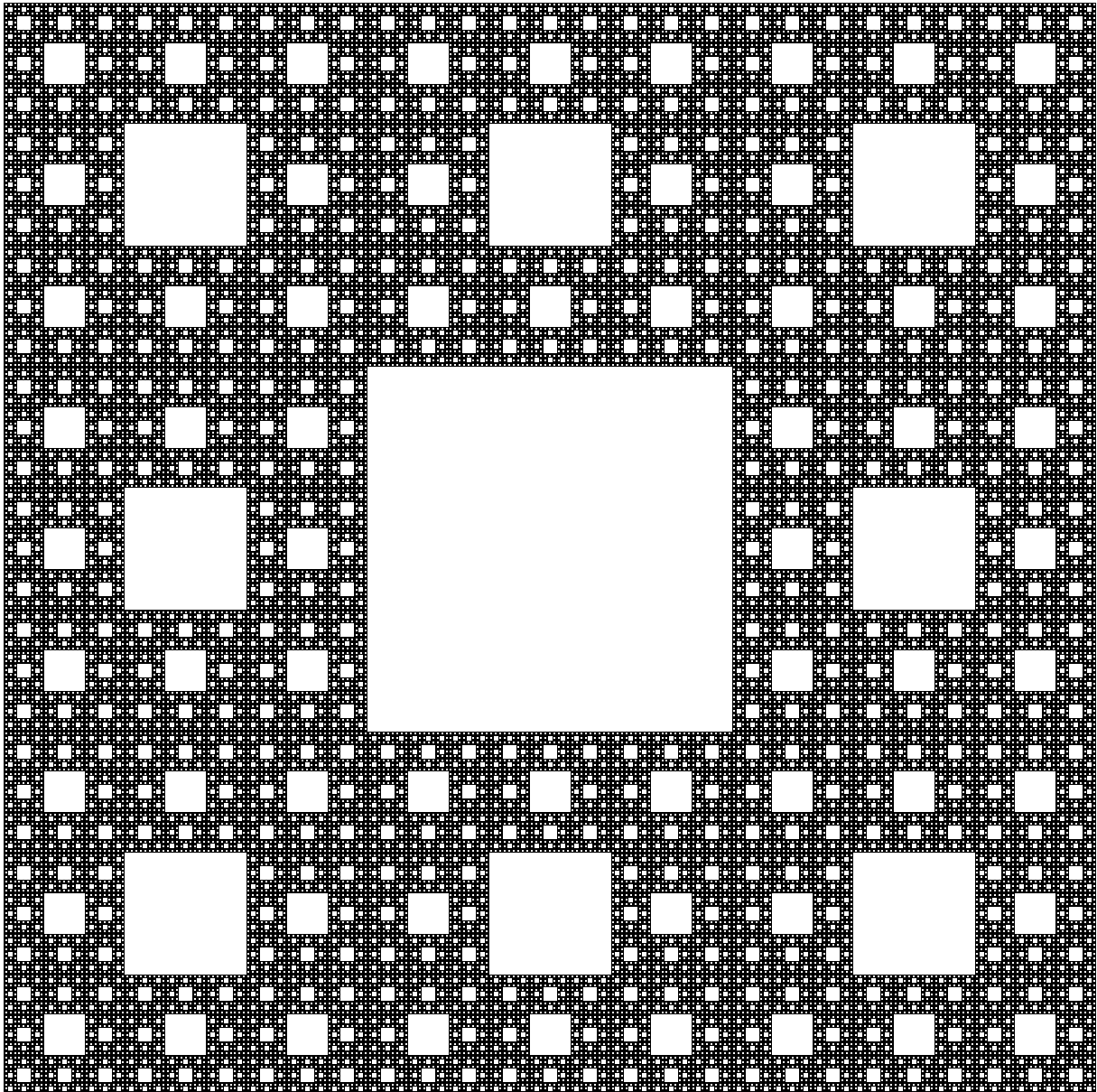
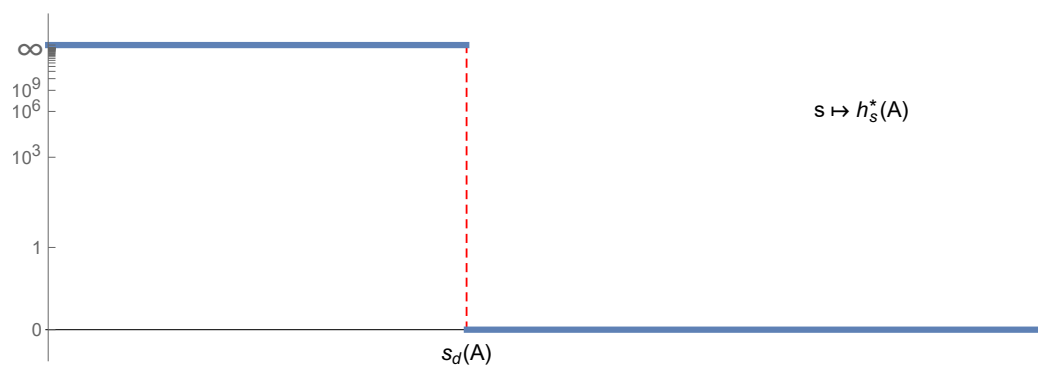
Abbildung 3.4: Sierpinski's Teppich  $S$ 

Abbildung 3.5: Das Hausdorf-Maß als Funktion der Dimension

## 3.2 Vom äußeren Maß zum Maß

**Definition 3.7** Sei  $\mu^*$  ein äußeres Maß auf  $X$ . Man nennt  $A \in \mathcal{P}(X)$   $\mu^*$ -messbar, wenn für jedes  $B \in \mathcal{P}(X)$  gilt:

$$\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \leq \mu^*(B). \quad (3.7)$$

Die Menge aller  $\mu^*$ -messbaren Mengen wird mit  $\mathcal{A}(\mu^*)$  bezeichnet.

**Bemerkung 3.7.1** Hier wird  $\mu^*$ -messbar definiert ohne etwas über eine  $\sigma$ -Algebra zu sagen. Wenn Sie sich wundern, wieso das geht, haben Sie völlig recht. Im nächsten Theorem wird dieses Problem aus der Welt geschafft, denn da wird  $\mathcal{A}(\mu^*)$  als die passende  $\sigma$ -Algebra identifiziert und  $\mu^*$  ist ein dazu passendes Maß.

**Bemerkung 3.7.2** Weil die  $\sigma$ -Subadditivität impliziert, dass für  $A, B \in \mathcal{P}(X)$

$$\mu^*(B) = \mu^*((A \cap B) \cup (A^c \cap B)) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B)$$

gilt, kann man die Ungleichung in (3.7) ersetzen durch ein Gleichheitszeichen.

**Theorem 3.8 (Caratheodory<sup>3</sup>)**

Sei  $\mu^*$  ein äußeres Maß auf  $X$ . Dann ist  $(X, \mathcal{A}(\mu^*), \mu^*_{|\mathcal{A}(\mu^*)})$  ein vollständiger Maßraum.

**Bemerkung 3.8.1** Das heißt, dass  $\mathcal{A}(\mu^*)$  eine  $\sigma$ -Algebra ist und dass  $\mu^*_{|\mathcal{A}(\mu^*)}$  ein Maß ist auf diese  $\sigma$ -Algebra.

**Definition 3.9** Sei  $\mu^*$  ein äußeres Maß auf  $X$ . Dann heißt  $\mu := \mu^*_{|\mathcal{A}(\mu^*)}$  das von  $\mu^*$  induzierte Maß auf  $\mathcal{A}(\mu^*)$ .

**Beweis von Theorem 3.8.** Zu zeigen ist, dass  $\mathcal{A}(\mu^*)$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, dass  $\mu^*_{|\mathcal{A}(\mu^*)}$  ein Maß ist und auch noch die Vollständigkeit.

- Wir zeigen erst, dass  $\mathcal{A}(\mu^*)$  eine  $\sigma$ -Algebra ist.

1) Aus

$$\mu^*(X \cap B) + \mu^*(X^c \cap B) = \mu^*(B) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(B)$$

folgt  $X \in \mathcal{A}(\mu^*)$ .

2) Aus der Symmetrie der Bedingung (3.7) folgt  $A \in \mathcal{A}(\mu^*) \implies A^c \in \mathcal{A}(\mu^*)$ .

3) Sei  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\mu^*)$ ; es soll gezeigt werden, dass (3.7) auch gilt für  $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ . Wir zeigen dies erst für  $A = A_1 \cup A_2$  und dürfen annehmen, dass  $\mu^*(B) < \infty$ . Im Fall, dass  $\mu^*(B) = \infty$  gilt, ist (3.7) sofort erfüllt. Wir müssen zeigen, dass für jedes  $B \in \mathcal{P}(X)$  gilt:

$$\mu^*((A_1 \cup A_2) \cap B) + \mu^*((A_1 \cup A_2)^c \cap B) \leq \mu^*(B). \quad (3.8)$$

Weil  $(A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap A_2 \cap B) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap B) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap B)$  gilt, folgt wegen der Subadditivität, dass

$$\mu^*((A_1 \cup A_2) \cap B) \leq \mu^*(A_1 \cap A_2 \cap B) + \mu^*(A_1^c \cap A_2 \cap B) + \mu^*(A_1 \cap A_2^c \cap B) \quad (3.9)$$

<sup>3</sup>Constantin Caratheodory war ein griechischer Mathematiker. Er wurde geboren 1873 in Berlin und starb 1950 in München.

Weil  $(A_1 \cup A_2)^c \cap B = A_1^c \cap A_2^c \cap B$  folgt, wenn wir (3.9) und dreimal (3.7) verwenden, dass

$$\begin{aligned} & \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap B) + \mu^*((A_1 \cup A_2)^c \cap B) \leq \\ & \left( \mu^*(A_1 \cap A_2 \cap B) + \mu^*(A_1^c \cap A_2 \cap B) + \mu^*(A_1 \cap A_2^c \cap B) \right) + \mu^*(A_1^c \cap A_2^c \cap B) = \\ & \left( \mu^*(A_1 \cap (A_2 \cap B)) + \mu^*(A_1^c \cap (A_2 \cap B)) \right) + \\ & \quad + \left( \mu^*(A_1 \cap (A_2^c \cap B)) + \mu^*(A_1^c \cap (A_2^c \cap B)) \right) \leq \\ & \mu^*(A_2 \cap B) + \mu^*(A_2^c \cap B) \leq \mu^*(B). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Also folgt  $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}(\mu^*)$  und wegen 2) gilt auch dass  $A_1 \cap A_2 = (A_1^c \cup A_2^c)^c \in \mathcal{A}(\mu^*)$ . Wegen Bemerkung 3.7.2 folgt sogar, dass jede Ungleichung in (3.10) durch ein Gleichheitszeichen ersetzt werden kann.

Betrachten wir anschließend  $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$  für  $A_i$ , die (3.7) erfüllen. Weil wir gerade bewiesen haben, dass auch  $A_i \cap A_j^c$  (3.7) erfüllt, folgt, dass  $\tilde{A}_n = A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)^c$  auch (3.7) erfüllt. Weil

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{A}_i$$

dürfen wir annehmen, dass die  $A_i$  paarweise disjunkt sind. Aus (3.10) folgt für  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , dass

$$\mu^*((A_1 \cup A_2) \cap B) = \mu^*(A_1 \cap B) + \mu^*(A_2 \cap B).$$

Für paarweise disjunkte  $\{A_1, \dots, A_n\} \in \mathcal{A}(\mu^*)$  finden wir, dass  $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}(\mu^*)$  und

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap B\right) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A_i \cap B). \quad (3.11)$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass (3.7) auch für eine abzählbare Vereinigung gilt. Sei  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\mu^*)$  eine disjunkte Folge und setze  $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ . Es gibt zwei Möglichkeiten. Wenn  $\mu^*(B) = \infty$ , hat man nichts zu beweisen. Wenn  $\mu^*(B) < \infty$ , dann gilt auch  $\mu^*(A \cap B) < \infty$  und es folgt aus der  $\sigma$ -Subadditivität und (3.11) und die zweite Eigenschaft eines äußeren Maßes, dass

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap B) & \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \mu^*(A_i \cap B) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*\left(\bigcup_{i=0}^n A_i \cap B\right) \leq \mu^*(A \cap B). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Es folgt  $\mu^*(A \cap B) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B)$  und weil  $\mu^*(A \cap B) \leq \mu^*(B) < \infty$  gilt, konvergiert diese Reihe in  $\mathbb{R}$ . Man findet

$$\mu^*(A \cap B) = \mu^*\left(\bigcup_{i=0}^n A_i \cap B\right) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B).$$

Weil  $A^c = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i^c \subset \bigcap_{i=1}^n A_i^c$  gilt, folgt

$$\begin{aligned} & \mu^*(A^c \cap B) + \mu^*(A \cap B) \leq \mu^*\left(\bigcap_{i=0}^n A_i^c \cap B\right) + \mu^*(A \cap B) = \\ & = \mu^*\left(\left(\bigcup_{i=0}^n A_i\right)^c \cap B\right) + \mu^*\left(\bigcup_{i=0}^n A_i \cap B\right) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B) = \\ & \leq \mu^*(B) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

In (3.12) findet man, dass  $\sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B)$  konvergiert, falls  $\mu^*(B) < \infty$ . Das heißt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B) = 0.$$

Dann folgt aus (3.13), dass  $\mu^*(A^c \cap B) + \mu^*(A \cap B) \leq \mu^*(B)$ . Damit haben wir gezeigt, dass  $\mathcal{A}(\mu^*)$  eine  $\sigma$ -Algebra ist.

• Noch zu zeigen ist, dass  $\mu^*$  ein Maß ist zu  $\mathcal{A}(\mu^*)$ . Die erste Bedingung  $\mu^*(\emptyset) = 0$  folgt aus der Definition des äußeren Maßes. In (3.12) findet man, dass  $\mu^*(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cap B) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B)$  für paarweise disjunkte  $A_i \in \mathcal{A}(\mu^*)$ . Setze  $B = A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$  und es folgt, wenn  $\mu^*(A) < \infty$ , dass

$$\mu^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A_i). \quad (3.14)$$

Für  $\mu^*(A) = \infty$  folgt (3.14) aus der  $\sigma$ -Subadditivität. Also ist  $\mu^*$  ein Maß auf  $\mathcal{A}(\mu^*)$ .

• Schlussendlich zeigen wir noch die Vollständigkeit. Wenn  $\mu^*(A) = 0$ , dann gilt für  $\tilde{A} \subset A$ , dass  $\mu^*(\tilde{A}) = 0$  und für  $B \in \mathcal{P}(X)$  gilt

$$\mu^*(\tilde{A}^c \cap B) + \mu^*(\tilde{A} \cap B) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A) = \mu^*(B).$$

Das heißt  $\tilde{A} \in \mathcal{A}(\mu^*)$  und  $\mathcal{A}(\mu^*)$  ist vollständig. ■



Abbildung 3.6: Ein anderes Maß

# Analysis 3, Woche 4

## Lebesgue-Maß



Henri Léon Lebesgue:

*Réduites à des théories générales, les mathématiques seraient une belle forme sans contenu.*

Oder auf Deutsch: Reduziert auf allgemeine Theorien wäre die Mathematik eine schöne Form ohne Inhalt.

### 4.1 Lebesgue-Maß und Borel-Mengen

Für  $\mathbb{R}^n$  haben wir mit Hilfe des Volumens  $\nu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty)$ , und dabei ist  $\mathcal{B}$  die Menge aller Blöcke, das äußere Maß  $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$  definiert durch

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu(B_i); B_i \in \mathcal{B} \text{ und } A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right\}.$$

Bis jetzt haben wir folgendes:

- Lemma 3.2 besagt, dass  $\lambda^*$  tatsächlich ein äußeres Maß ist, welches wir das **äußere Lebesgue-Maß** genannt haben.
- In Definition 3.7 wird  $\mathcal{A}(\lambda^*) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  festgelegt.
- In Theorem 3.8 wird beschrieben, dass  $\mathcal{A}(\lambda^*)$  eine  $\sigma$ -**Algebra** ist und
- dass  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}(\lambda^*), \lambda^*_{|\mathcal{A}(\lambda^*)})$  ein **vollständiger Maßraum** ist.

**Definition 4.1** Man schreibt  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \lambda) := (\mathbb{R}^n, \mathcal{A}(\lambda^*), \lambda^*_{|\mathcal{A}(\lambda^*)})$  für diesen Maßraum. Das vom äußeren Lebesgue-Maß induzierte Maß  $\lambda$  nennt man das **Lebesgue-Maß**.

Man hat sich einige Mühe gegeben, eine Größe, die auf Blöcke definiert ist, zu einem Maß auf einer  $\sigma$ -Algebra zu erweitern. Die natürliche Frage, die aufkommt, ist: wie groß ist diese  $\sigma$ -Algebra, oder präziser gefragt: Welche Mengen sind denn nun Lebesgue-messbar?

**Theorem 4.2** Sei  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  die Standardtopologie und sei  $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  wie in Definition 4.1. Dann gilt  $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$ .

**Bemerkung 4.2.1** Zur Erinnerung:  $T \in \mathcal{T}$  genau dann, wenn es für jedes  $x \in T$  eine Zahl  $r \in \mathbb{R}^+$  gibt derart, dass  $B_r(x) \subset T$ .

**Bemerkung 4.2.2** Weil  $\mathcal{L} = \mathcal{A}(\lambda^*)$  ein  $\sigma$ -Algebra ist, folgt aus  $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$ , dass  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{L}$ . Man kann  $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$  auch formulieren als "offene Mengen sind Lebesgue-messbar". Die Aussage  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{L}$  lässt sich beschreiben als "die Mengen in der Standard-Borel- $\sigma$ -Algebra in  $\mathbb{R}^n$  sind Lebesgue-messbar". Die Mengen in der Borel- $\sigma$ -Algebra nennt man Borel-Mengen.

**Bemerkung 4.2.3** Man kann zeigen, dass  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} \neq \mathcal{L}$ . Das heißt, es gibt Lebesgue-messbare Mengen die keine Borel-Mengen sind.

Andererseits hat man auch, dass  $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{T}}} = \mathcal{L}$ . Genauer gesagt,  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \lambda)$  ist die Vervollständigung von  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}_{\mathcal{T}}, \lambda|_{\mathcal{A}_{\mathcal{T}}})$ .

Bevor wir Theorem 4.2 beweisen, werden wir uns erst ein Lemma anschauen und brauchen dazu die Distanz zweier Mengen in  $\mathbb{R}^n$ .

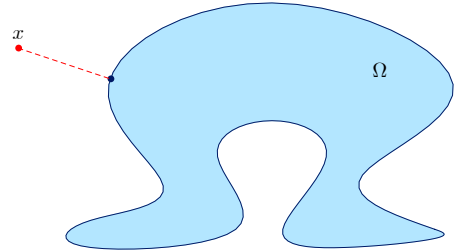
**Definition 4.3** Die **Distanz**  $d : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$  definiert man wie folgt:

$$d(\Omega_1, \Omega_2) = \inf \{ \|x - y\| ; x \in \Omega_1, y \in \Omega_2 \}.$$

Außerdem wird  $d : \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$  definiert durch

$$d(x, \Omega) = \inf \{ \|x - y\| ; y \in \Omega \}.$$

Also gilt  $d(x, \Omega) = d(\{x\}, \Omega)$ .



Es gilt  $d(\Omega_1, \Omega_2) = \infty$  genau dann, wenn  $\Omega_1 = \emptyset$  oder  $\Omega_2 = \emptyset$ .

**Lemma 4.4** Seien  $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  derart, dass  $d(A_1, A_2) > 0$ , dann gilt

$$\lambda^*(A_1 \cup A_2) = \lambda^*(A_1) + \lambda^*(A_2).$$

Hier ist  $\lambda^*$  das äußere Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Bemerkung 4.4.1** Mit Induktion zeigt man  $\lambda^*(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \lambda^*(A_i)$ , wenn  $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  derart ist, dass  $d(A_i, A_j) > 0$  für  $i \neq j$ .

**Beweis.** Sei  $d(A_1, A_2) = c > 0$ . Das äußere Lebesgue-Maß ist definiert als ein Infimum bei Überdeckungen mit Blöcken:

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu(B_i) ; B_i \in \mathcal{B} \text{ und } A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right\}.$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  und  $\mathcal{U} = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine Überdeckung durch Blöcke von  $A_1 \cup A_2$  mit  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \nu(B_i) < \lambda^*(A_1 \cup A_2) + \varepsilon$ . Wenn man die Blöcke gegebenenfalls in kleinere Blöcke aufteilt, kann man annehmen, dass jeder Block  $B_i$  einen Durchmesser kleiner als  $c$  hat. Dann gilt entweder  $A_1 \cap B_i = \emptyset$  oder  $A_2 \cap B_i = \emptyset$ . Das heißt  $\mathcal{U}_1 = \{B_i ; A_2 \cap B_i = \emptyset\}$  ist eine Überdeckung von  $A_1$  und  $\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_1$  ist eine von  $A_2$ . Es folgt

$$\lambda^*(A_1) \leq \sum_{B_i \in \mathcal{U}_1} \nu(B_i) \text{ und } \lambda^*(A_2) \leq \sum_{B_i \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_1} \nu(B_i)$$

and dann auch, dass

$$\lambda^*(A_1) + \lambda^*(A_2) \leq \sum_{B_i \in \mathcal{U}_1} \nu(B_i) + \sum_{B_i \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_1} \nu(B_i) < \lambda^*(A_1 \cup A_2) + \varepsilon.$$

Weil dies für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt  $\lambda^*(A_1) + \lambda^*(A_2) \leq \lambda^*(A_1 \cup A_2)$ . Die Subadditivität bringt  $\lambda^*(A_1 \cup A_2) \leq \lambda^*(A_1) + \lambda^*(A_2)$ . ■

**Beweis von Satz 4.2.** Man soll zeigen, dass für jede offene Menge  $A$  die Bedingung in Definition 3.7 erfüllt ist, d.h.

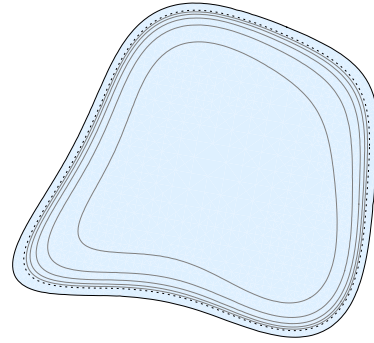
$$\lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A^c \cap B) \leq \lambda^*(B) \text{ für alle } B \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Hier ist  $\lambda^*$  das äußere Lebesgue-Maß. Wir dürfen annehmen, dass  $\lambda^*(B) < \infty$ .

Sei nun  $A$  eine offene Menge. Wir werden  $A$  ein wenig verkleinern, indem wir dünne Schichten am Rande von  $A$  entfernen:

$$A_n = \left\{ x \in A; d(x, A^c) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Es gilt, dass  $A_n \subset A_{n+1} \subset A_{n+2} \subset \dots \subset A$ . Weil  $A$  offen ist, findet man  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  und  $A \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)$ . Wir setzen außerdem  $S_n = A_{n+1} \setminus A_n$  und bemerken, dass



$$d(S_n, S_{n+2}) \geq \frac{1}{(n+1)n} > 0.$$

Denn  $x \in S_{n+2} \subset A_{n+1}^c$  bedeutet, dass es  $b \in A^c$  gibt mit  $\|x - b\| \leq \frac{1}{n+1}$  und  $y \in S_n \subset A_n$ , dass  $\|y - b\| \geq \frac{1}{n}$ . Es folgt

$$\|x - y\| \geq \|y - b\| - \|x - b\| \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)n}.$$

Wegen Bemerkung 4.4.1 gilt

$$\sum_{i=1}^n \lambda^*(S_{2i} \cap B) = \lambda^*\left(\bigcup_{i=1}^n S_{2i} \cap B\right) \leq \lambda^*(B) < \infty$$

und

$$\sum_{i=1}^n \lambda^*(S_{2i-1} \cap B) = \lambda^*\left(\bigcup_{i=1}^n S_{2i-1} \cap B\right) \leq \lambda^*(B) < \infty.$$

Diese Abschätzungen zeigen, dass  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(S_i \cap B)$  beschränkt ist durch  $2\lambda^*(B)$  und darum konvergiert. Es folgt, dass

$$\lambda^*((A \setminus A_n) \cap B) = \lambda^*\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} S_i \cap B\right) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \lambda^*(S_i \cap B) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Sei  $\varepsilon > 0$  und nehme  $n$  derart, dass  $\lambda^*((A \setminus A_n) \cap B) < \varepsilon$ . Dann gilt wegen Subadditivität und Lemma 4.4, dass

$$\begin{aligned} \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A^c \cap B) &\leq \lambda^*((A \setminus A_n) \cap B) + \lambda^*(A_n \cap B) + \lambda^*(A^c \cap B) = \\ &= \lambda^*((A \setminus A_n) \cap B) + \lambda^*((A_n \cup A^c) \cap B) < \varepsilon + \lambda^*(B). \end{aligned}$$

Weil diese Abschätzungen für beliebige  $\varepsilon > 0$  gemacht werden können, gilt

$$\lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A^c \cap B) \leq \lambda^*(B)$$

und so haben wir erreicht, dass  $A \in \mathcal{L}$ . ■

## 4.2 Approximieren von außen und von innen

**Theorem 4.5** Für jedes  $M \in \mathcal{L}$  gilt:

$$\begin{aligned}\lambda(M) &= \inf \{ \lambda(O); M \subset O \text{ offen} \}, \\ \lambda(M) &= \sup \{ \lambda(K); M \supset K \text{ kompakt} \}.\end{aligned}$$

**Beweis.** 1) Wenn  $\lambda(M) = \infty$ , dann liefert  $M \subset O$  auch  $\lambda(O) = \infty$ , und man ist fertig. Wir dürfen also annehmen, dass  $\lambda(M) < \infty$ . Es gilt, dass

$$\lambda(M) = \lambda^*(M) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{Vol}(B_i); \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \supset M \text{ mit Blöcken } B_i \right\}.$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es Blöcke  $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \supset M$  und

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{Vol}(B_i) < \lambda^*(M) + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Man ersetzt

$$B_i = [a_{i,1}, b_{i,1}) \times \cdots \times [a_{i,n}, b_{i,n})$$

durch

$$\tilde{B}_i = (a_{i,1} - \delta_i, b_{i,1}) \times \cdots \times (a_{i,n} - \delta_i, b_{i,n})$$

und nimmt  $\delta_i > 0$  genügend klein, nämlich derart, dass

$$\text{Vol}(\tilde{B}_i) \leq \text{Vol}(B_i) + 2^{-i-2}\varepsilon.$$

So findet man  $O := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{B}_i$  ist offen,  $M \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \subset O$  und

$$\lambda(O) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{Vol}(\tilde{B}_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{Vol}(B_i) + \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i-2}\varepsilon < \lambda(M) + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Weil  $\varepsilon > 0$  beliebig ist, ist die erste Behauptung bewiesen.

2) Wenn  $M$  beschränkt ist, sagen wir  $M \subset B_R(0)$ , dann betrachtet man  $B_R(0) \setminus M$  und nimmt eine offene Menge  $O \supset B_R(0) \setminus M$  mit

$$\lambda(O) < \lambda(B_R(0) \setminus M) + \varepsilon.$$

Man definiert  $K = \overline{B_R(0)} \cap O^c$ . Dann ist  $K$  kompakt, liegt innerhalb von  $M$  und

$$\begin{aligned}\lambda(K) &= \lambda(\overline{B_R(0)}) - \lambda(\overline{B_R(0)} \cap O) \geq \lambda(B_R(0)) - \lambda(O) > \\ &> \lambda(B_R(0)) - \lambda(B_R(0) \setminus M) - \varepsilon = \lambda(M) - \varepsilon.\end{aligned}$$

Wenn  $M$  unbeschränkt ist, betrachten wir  $M_n = M \cap B_n(0)$  und nehmen eine kompakte Menge  $K_n \subset M_n$  mit  $\lambda(K_n) > \lambda(M_n) - \frac{1}{2}\varepsilon$ . Es gibt zwei Möglichkeiten, entweder  $\lambda(M) = \infty$  oder  $\lambda(M) < \infty$ . Wenn  $\lambda(M) = \infty$  dann hat man  $\lambda(M_n) \rightarrow \infty$  und auch  $\lambda(K_n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wenn  $\lambda(M) < \infty$ , dann gilt  $\lambda(M_n) \rightarrow \lambda(M)$ , und  $\{\lambda(M_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist sogar eine wachsende Folge. Es gibt also  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  derart, dass  $\lambda(M_n) > \lambda(M) - \frac{1}{2}\varepsilon$  für  $n \geq n_\varepsilon$ . Es gilt für  $K_{n_\varepsilon}$ , dass  $K_{n_\varepsilon} \subset M_{n_\varepsilon} \subset M$  und

$$\lambda(K_{n_\varepsilon}) > \lambda(M_{n_\varepsilon}) - \frac{1}{2}\varepsilon > \lambda(M) - \varepsilon.$$

Weil dies für beliebige  $\varepsilon > 0$  gilt, hat man die zweite Behauptung bewiesen. ■



**Beispiel 4.6** *Obwohl Lebesgue-messbare Mengen von außen mit offenen Mengen und von innen mit kompakten Mengen approximiert werden können, kann so eine Lebesgue-messbare Menge noch ziemlich wild aussehen. Die Cantor-Menge  $C$  konstruiert man, indem man das mittlere Drittel von  $[0, 1]$  entfernt, und aus den beiden Restintervallen wiederum das mittlere Drittel entfernt usw:*

$$C_0 = [0, 1], C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right], \dots$$

Man setzt

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Weil  $\lambda(C_0) = 1$  und  $\lambda(C_{n+1}) = \frac{2}{3}\lambda(C_n)$  für  $n \in \mathbb{N}$  gilt, folgt  $\lambda(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ . Weil  $\lambda(C) \leq \lambda(C_n)$  findet man  $\lambda(C) = 0$ . Trotzdem ist  $C$  nicht abzählbar. Wieso eigentlich nicht?

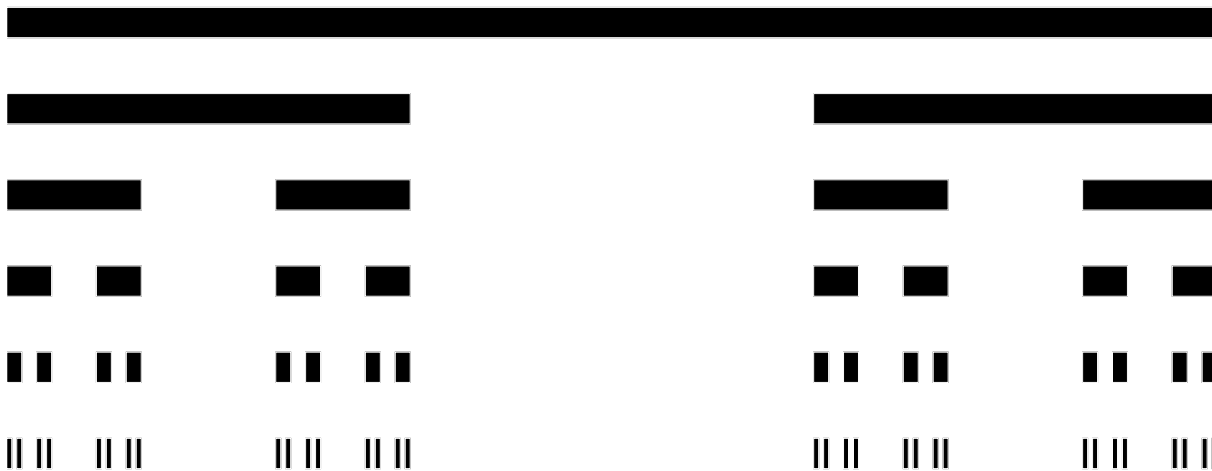


Abbildung 4.1: Die ersten 6 Schritte in der Konstruktion der Cantor-Menge

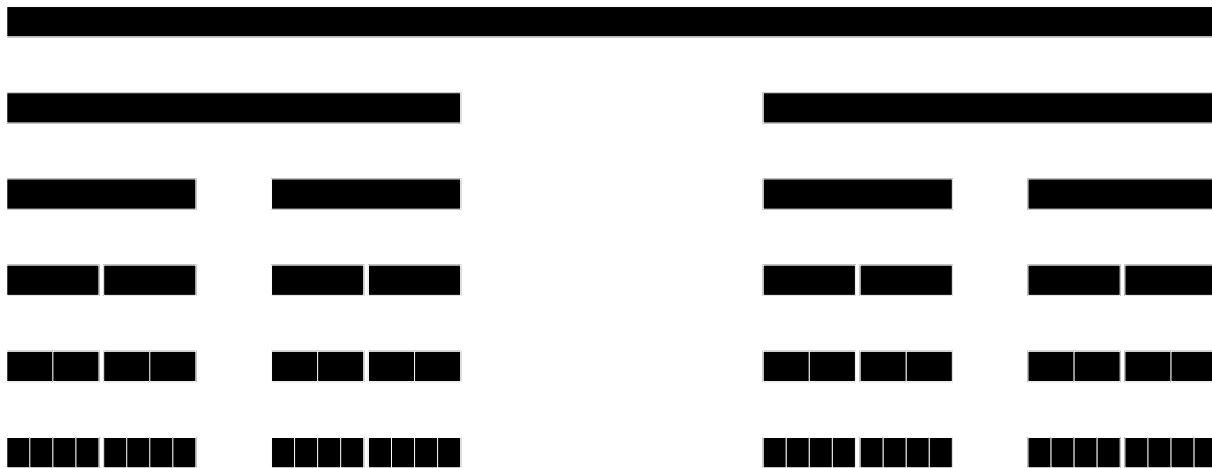


Abbildung 4.2: Die ersten 6 Schritte in der Konstruktion der fetten Cantor-Menge

**Beispiel 4.7** *Man kann in der Konstruktion der Cantor-Menge im  $n$ -ten Schritt statt Intervalle mit Länge  $\left(\frac{1}{3}\right)^n$  Intervalle mit Länge  $\left(\frac{1}{4}\right)^n$  entfernen:*

$$C_0^* = [0, 1], C_1^* = \left[0, \frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, 1\right], C_2^* = \left[0, \frac{5}{32}\right] \cup \left[\frac{7}{32}, \frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, \frac{25}{32}\right] \cup \left[\frac{27}{32}, 1\right], \dots$$

Diese Menge  $C_f = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n^*$  wird auch die fette Cantor-Menge genannt. Man hat  $\lambda(C_n^*) = 1 - \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k$  und weil man von außen mit offenen Mengen  $C_n^*$  und auch  $C_f$  approximieren kann, folgt

$$\lambda(C_f) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{4^k} = \frac{1}{2}.$$

Trotzdem enthält  $C_f$  kein Intervall mit positiver Länge und es gilt  $(\overline{C_f})^\circ = \emptyset$ .

### 4.3 Nicht alles ist Lebesgue-messbar

Theorem 4.2 sagt aus, dass alle Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ , die man bekommt durch abzählbare Mengenoperationen (Vereinigung, Schnitt oder Komplementbildung) von offenen und abgeschlossenen Mengen, Lebesgue-messbar sind. Das sind sehr viele Teilmengen. Gibt es denn überhaupt nicht-Lebesgue-messbare Mengen?

Um diese Frage zu beantworten, verwenden wir das folgende Ergebnis:

**Theorem 4.8 (Steinhaus<sup>1</sup>)** Wenn für  $A \in \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  gilt, dass  $\lambda(A) > 0$ , dann gibt es  $\delta > 0$  derart, dass

$$B_\delta(0) \subset A - A := \{x - y; x, y \in A\}.$$

**Beweis.** Weil  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A \cap B_n(0)) = \lambda(A)$  gilt wegen Theorem 2.10, dürfen wir annehmen, dass es  $r > 0$  gibt mit  $\lambda(A \cap B_r(0)) > 0$ . Für  $\tilde{A} = A \cap B_r(0)$  gibt es wegen Theorem 4.5 für jedes  $\varepsilon > 0$  eine kompakte Menge  $K$  und eine offene Menge  $O$  derart, dass  $K \subset \tilde{A} \subset O$  und mit

$$\lambda(O) - \varepsilon < \lambda(\tilde{A}) < \lambda(K) + \varepsilon.$$

Nehmen wir  $\varepsilon = \frac{1}{3}\lambda(\tilde{A})$ , dann folgt

$$\lambda(O) < \frac{4}{3}\lambda(\tilde{A}) \text{ und } \frac{2}{3}\lambda(\tilde{A}) < \lambda(K)$$

und wir finden, dass

$$\lambda(O) < \frac{4}{3}\lambda(\tilde{A}) < 2\lambda(K). \quad (4.1)$$

Weil  $K \subset O$  gilt und  $O$  offen ist, gibt es für jedes  $x \in K$  ein  $r_x > 0$  mit  $B_{r_x}(x) \subset O$ . Die Menge  $K$  wird auch von  $\left\{B_{\frac{1}{2}r_x}(x); x \in K\right\}$  überdeckt und  $B_{\frac{1}{2}r_x}(x) \subset O$ . Weil  $K$  kompakt ist, gibt es endlich viele  $\left\{B_{\frac{1}{2}r_{x_i}}(x_i)\right\}_{i=1}^{\ell}$ , die  $K$  schon überdecken. Das heißt, für jedes  $x \in K$  gibt es  $i \in \{1, \dots, \ell\}$  mit  $x \in B_{\frac{1}{2}r_{x_i}}(x_i)$  und es gilt

$$d(x, O^c) \geq d(x_i, O^c) - \|x - x_i\| \geq r_{x_i} - \frac{1}{2}r_{x_i} = \frac{1}{2}r_{x_i}.$$

Es folgt

$$\delta := d(K, O^c) \geq \min \left\{ r_{\frac{1}{2}x_i}; 1 \leq i \leq \ell \right\} > 0.$$

Wir behaupten  $B_\delta(0) \subset A - A$ . Sei  $x \in B_\delta(0)$  und wir nehmen an  $x \notin K - K$ . Dann gilt für  $x + K = \{x + y; y \in K\} \subset O$ , dass

$$K \cup (x + K) \subset O \text{ und } K \cap (x + K) = \emptyset.$$

<sup>1</sup>Hugo Dionizy Steinhaus, polnischer Mathematiker, 1887-1972

Es folgt

$$\lambda(O) \geq \lambda(K \cup (x + K)) = \lambda(K) + \lambda(x + K) - \lambda(K \cap (x + K)) = 2\lambda(K), \quad (4.2)$$

und dies ist ein Widerspruch zu (4.1). Also gilt  $B_\delta(0) \subset K - K \subset A - A$ . ■

**Beispiel 4.9 (Eine nicht-Lebesgue-messbare Menge.)** Für  $x \in \mathbb{R}$  setzen wir

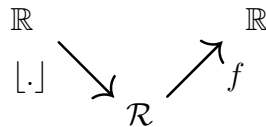
$$[x] = x + \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

und wir definieren die Menge aller solchen Mengen:

$$\mathcal{R} = \{[x] ; x \in \mathbb{R}\}.$$

So ist  $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  als Menge isomorph zu  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ . Bemerke, dass  $[x] = [y]$  gilt genau dann, wenn  $x - y \in \mathbb{Q}$ .

Das Auswahlaxiom lässt uns für jedes  $R \in \mathcal{R}$  eine Zahl  $y \in \mathbb{R}$  finden mit  $R = [y]$ . Sei  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine solche Funktion, das heißt,  $f(R) = y$  und  $R = [y]$ . Wir haben also, dass  $f(\mathcal{R}) \subset \mathbb{R}$ , oder anders gesagt,  $f(\mathcal{R}) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ .



Wir werden zeigen, dass  $f(\mathcal{R})$  nicht Lebesgue-messbar ist für solch eine Funktion  $f$ .

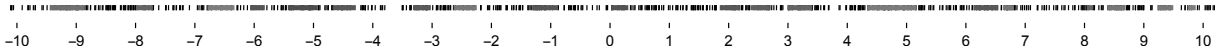


Abbildung 4.3: Von oben nach unten: Darstellungen von  $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ , ein  $f(\mathcal{R})$  und  $\mathbb{Z}$ .

Für einen Widerspruchsbeweis nimmt man an, dass  $f(\mathcal{R})$  Lebesgue-messbar ist. Das heißt,  $\lambda(f(\mathcal{R}))$  ist wohldefiniert in  $[0, \infty]$ .

Wenn  $\lambda(f(\mathcal{R})) > 0$ , dann folgt aus dem Theorem von Steinhaus, dass die Menge  $f(\mathcal{R}) - f(\mathcal{R})$  eine Umgebung von 0 enthält. Weil für  $x, y \in f(\mathcal{R})$  mit  $x \neq y$  gilt, dass  $x - y \notin \mathbb{Q}$ , folgt

$$\mathbb{Q} \cap (f(\mathcal{R}) - f(\mathcal{R})) = \{0\}$$

und man hat einen Widerspruch.

Wenn  $\lambda(f(\mathcal{R})) = 0$ , dann gilt auch  $\lambda(q + f(\mathcal{R})) = 0$  für jede Zahl  $q \in \mathbb{Q}$ . Eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge. Die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar und deshalb folgt

$$\lambda(\mathbb{Q} + f(\mathcal{R})) = 0.$$

Für jedes  $y \in f(\mathcal{R})$  gilt  $[y] = y + \mathbb{Q}$  und

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} [x] = \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R = \bigcup_{y \in f(\mathcal{R})} [y] = \bigcup_{y \in f(\mathcal{R})} y + \mathbb{Q} = f(\mathcal{R}) + \mathbb{Q}.$$

Dies gibt einen Widerspruch zu  $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$ .

Die Annahme, dass  $f(\mathcal{R})$  Lebesgue-messbar ist, muss falsch sein.



# Analysis 3, Woche 5

## Lebesgue-Integral



### 5.1 Definition des Lebesgue-Integrals

#### 5.1.1 Für einfache Funktionen

Wenn wir  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten, nehmen wir an, dass  $X \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ .

**Definition 5.1** Eine Funktion  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$  heißt **einfach**, wenn  $f(X)$  abzählbar ist.

**Bemerkung 5.1.1** Eine Treppenfunktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit endlich vielen Stufen, so wie sie für Riemann-Integrale verwendet wurden, ist einfach. In dem Fall ist  $f([a, b])$  sogar endlich.

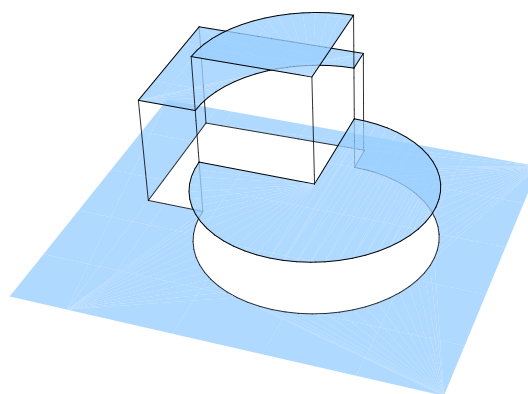
Wenn die Bildmenge unendlich abzählbar ist, sagen wir  $f(X) = \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $y_i \in [-\infty, \infty]$ , dann bedeutet das, dass  $X$  die disjunkte Vereinigung der Urbilder  $\{f^{-1}(y_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  ist. Setzen wir  $A_i := f^{-1}(y_i)$ , dann folgt

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \mathbf{1}_{A_i}. \quad (5.1)$$

Die Funktion  $\mathbf{1}_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Man nennt  $\mathbf{1}_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die **Indikatorfunktion von**, oder manchmal auch charakteristische Funktion zu,  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Statt  $\mathbf{1}_A$  wird übrigens auch  $\chi_A$  verwendet.



**Beispiel 5.2** In der Abbildung findet man eine Darstellung von

$$f = \mathbf{1}_K + 2 \mathbf{1}_R$$

mit  $K$  einer Kreisscheibe und  $R$  einem Rechteck. Für diese Funktion möchte man das Integral definieren durch

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda = 1 \operatorname{Vol}_{\mathbb{R}^2}(K) + 2 \operatorname{Vol}_{\mathbb{R}^2}(R).$$

Übrigens gilt auch, dass  $f = \mathbf{1}_{K \setminus R} + 2 \mathbf{1}_{R \setminus K} + 3 \mathbf{1}_{R \cap K}$ . Man findet die gleiche Zahl durch

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda = 1 \operatorname{Vol}_{\mathbb{R}^2}(K \setminus R) + 2 \operatorname{Vol}_{\mathbb{R}^2}(R \setminus K) + 3 \operatorname{Vol}_{\mathbb{R}^2}(R \cap K).$$

Weil  $K \setminus R = f^{-1}(1)$ ,  $R \setminus K = f^{-1}(2)$  und  $R \cap K = f^{-1}(3)$ , folgt, dass  $f$  eine einfache Funktion ist.

Die Idee, wie man das Integral definiert, kann man verwenden für allgemeinere Gebiete, wenn man das Volumen durch das Lebesgue-Maß ersetzt. Für einfache Funktionen  $f$  bedeutet dies, dass die Mengen, für die  $f$  konstant ist, Lebesgue-Mengen sein müssen. Für einfache Funktionen mit  $f(X) = \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  und  $A_i := f^{-1}(y_i)$  gilt nämlich, dass

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \mathbf{1}_{A_i}(x), \quad (5.2)$$

und würde gerne

$$\int_X f \, d\lambda = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \lambda(A_i) \quad (5.3)$$

als Integral definieren.

Es reicht jedoch nicht, dass  $\lambda(A_i)$  definiert ist, das heißt,  $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$  gilt, sondern auch, dass die Summe in (5.3) konvergiert. Für  $y_i \geq 0$  liefert die Konvergenz in  $[0, \infty]$ , einschließlich  $\infty$ , kein Probleme und daher definiert man allererst das Integral für nicht-negative einfache Funktionen.

**Definition 5.3** Für eine nichtnegative **einfache** Funktion  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  der Form

$$f = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \mathbf{1}_{A_i},$$

mit  $A_i \in \mathcal{L}$ -messbar für alle  $i \in \mathbb{N}$ , definiert man

$$\int_X f \, d\lambda = \begin{cases} \sum_{i \in \mathbb{N} \text{ mit } y_i \in (0, \infty)} y_i \lambda(A_i) & \text{falls } \lambda(f^{-1}(\{\infty\})) = 0, \\ \infty & \text{falls } \lambda(f^{-1}(\{\infty\})) > 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

**Bemerkung 5.3.1** Auch wenn  $\lambda(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$  kann die Summe  $\infty$  werden, entweder weil die Summe nicht in  $\mathbb{R}$  konvergiert oder weil  $\lambda(A_i)$  unendlich ist. Weil in der Summe in (5.4) jedoch nur über nicht-negative Zahlen und möglicherweise  $\infty$  summiert wird, gibt es in jedem Fall keine Ambivalenz bezüglich der Reihenfolge in dieser Summe. Außerdem wird durch  $y_i \in (0, \infty)$  sowohl ein Produkt von  $y_i = 0$  mit  $\lambda(A_i) = \infty$  als von  $y_i = \infty$  mit  $\lambda(A_i) = 0$  vermieden.

**Bemerkung 5.3.2** Bemerke, dass für einfache Funktionen  $f$  in (5.2) mit  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$  gilt, dass sie  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ - $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ -messbar sind. Übrigens, wenn klar ist, welche Dimension gemeint ist, schreiben wir  $\mathcal{L}$  statt  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ .

Als nächstes wollen wir auch Funktionen zulassen, die das Vorzeichen wechseln. Um  $(\infty - \infty)$ -Probleme zu vermeiden, betrachten wir positiver Teil und negativer Teil der Funktion getrennt.

**Lemma 5.4** Sei  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty)$  eine **einfache**  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$ -messbare Funktion. Dann sind  $f^+$  und  $f^-$ , definiert durch

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \quad \text{und} \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0)$$

**einfache**  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$ -messbare Funktionen und  $\int_X f^+ d\lambda$  und  $\int_X f^- d\lambda$  sind wohldefiniert in  $[0, \infty]$ .

**Bemerkung 5.4.1** Man hat  $f = f^+ - f^-$  und  $|f| = f^+ + f^-$ . Siehe Abbildung 5.1.

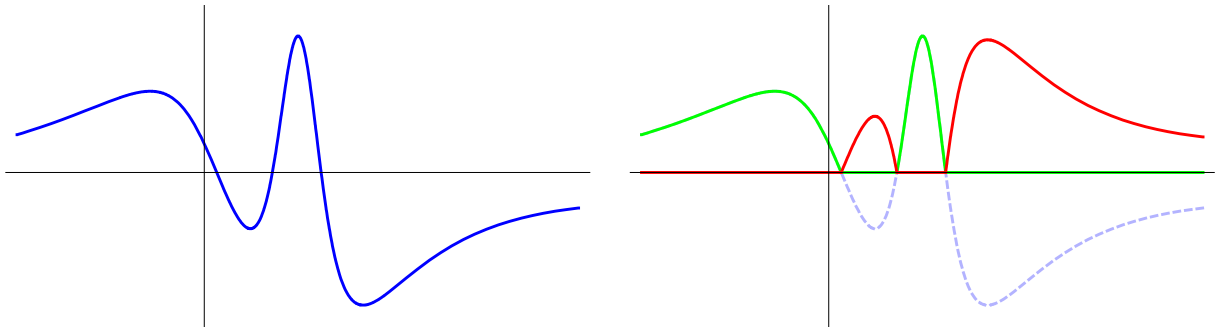


Abbildung 5.1: Links der Graph einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und rechts der für  $f^+$  und  $f^-$ .

**Beweis.** Die Mengen  $A_i = f^{-1}(y_i)$  sind paarweise disjunkt und so gilt

$$f^+ = \max \left( \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \mathbf{1}_{A_i}, 0 \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \max(y_i, 0) \mathbf{1}_{A_i}.$$

Also ist  $f^+$  eine einfache Funktion. Ähnliches gilt für  $f^-$ .

Wir zeigen, dass  $f^+$   $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$ -messbar ist, und nehmen dazu  $A \in \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Zu zeigen ist, dass  $(f^+)^{-1}(A) \in \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ . Es gilt, dass auch  $A_+ = A \cap (0, \infty) \in \mathcal{L}$ ,  $A_0 = A \cap \{0\} \in \mathcal{L}$  und  $A_- = A \cap (-\infty, 0) \in \mathcal{L}$ . Weil  $A = A_+ \cup A_0 \cup A_-$ , folgt

$$(f^+)^{-1}(A) = (f^+)^{-1}(A_+) \cup (f^+)^{-1}(A_0) \cup (f^+)^{-1}(A_-).$$

Man findet

$$\begin{aligned} (f^+)^{-1}(A_+) &= f^{-1}(A_+) \in \mathcal{L}, \\ (f^+)^{-1}(\{0\}) &= f^{-1}((-\infty, 0]) \in \mathcal{L}, \\ (f^+)^{-1}(A_-) &= \emptyset \in \mathcal{L}, \end{aligned}$$

und es folgt, wenn  $A_0 = \{0\}$ , dass

$$(f^+)^{-1}(A) = f^{-1}(A_+) \cup f^{-1}((-\infty, 0]) \in \mathcal{L}.$$

Wenn  $A_0 = \emptyset$  gilt, folgt

$$(f^+)^{-1}(A) = f^{-1}(A_+) \in \mathcal{L}.$$

Auch hier gilt ähnliches für  $f^-$ . ■

**Definition 5.5 (Lebesgue-Integral für einfache Funktionen)** Sei  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty)$  eine **einfache**  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$ -messbare Funktion. Man nennt  $f$  **Lebesgue-integrierbar** auf  $X$ , wenn  $\int_X f^+ d\lambda < \infty$  und  $\int_X f^- d\lambda < \infty$ . Dann definiert man das Lebesgue-Integral von  $f$  über  $X$  als

$$\int_X f d\lambda = \int_X f^+ d\lambda - \int_X f^- d\lambda.$$

**Bemerkung 5.5.1** Lebesgue-integrierbar lässt sich auch für Funktionen  $f$  definieren, die auch  $\infty$  oder  $-\infty$  als Werte annehmen, aber dann nur auf Nullmengen:  $\lambda(\{x \in X; |f(x)| = \infty\}) = 0$ . Weil das Lebesgue-Integral eine Nullmenge nicht sieht, kann man die Funktion  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$  ersetzen durch die Funktion  $f^* : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } |f(x)| \neq \infty, \\ 0 & \text{falls } |f(x)| = \infty. \end{cases}$$

Man nennt  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$  Lebesgue-integrierbar, wenn  $\lambda(\{x \in X; |f(x)| = \infty\}) = 0$  und  $f^*$  Lebesgue-integrierbar ist. Man definiert dann

$$\int_X f d\lambda = \int_X f^* d\lambda.$$

### 5.1.2 Für allgemeinere Funktionen

Die folgende Konstruktion sollte einem bekannt vorkommen, wenn man sich noch an die Einführung des Riemann-Integrals erinnert. Der Unterschied zum Riemann-Integral aus den Analysis-1&2-Vorlesungen ist, dass nun viel mehr elementare Funktionen beim Approximieren zugelassen sind.

**Definition 5.6** Sei  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir definieren **das obere Integral** durch

$$\overline{\int}_X f d\lambda = \inf \left\{ \int_X g d\lambda; g : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist einfach, Lebesgue-integrierbar und } f \leq g \right\},$$

und **das untere Integral** durch

$$\underline{\int}_X f d\lambda = \sup \left\{ \int_X g d\lambda; g : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist einfach, Lebesgue-integrierbar und } g \leq f \right\}.$$

**Bemerkung 5.6.1** Das Supremum von  $G \subset \mathbb{R}$  ist definiert als die kleinste obere Schranke und  $s$  ist eine obere Schranke für  $G$ , wenn  $x \leq s$  für alle  $x \in G$ . Wenn  $G$  die leere Menge ist, ist jedes  $s \in \mathbb{R}$  eine obere Schranke und man definiert  $\sup \emptyset = -\infty$ . Ebenso setzt man  $\inf \emptyset = \infty$ . Wenn es also keine einfache Lebesgue-integrierbare Funktion oberhalb von  $f$  gibt, setzt man  $\overline{\int}_X f d\lambda = \infty$ .

**Bemerkung 5.6.2** Die Definition ist so, dass für eine einfache Lebesgue-integrierbare Funktion  $g : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\overline{\int}_X g d\lambda = \int_X g d\lambda = \underline{\int}_X g d\lambda \in \mathbb{R}.$$

Die Definitionen 5.6 und 5.5 widersprechen sich also nicht.



**Lemma 5.7** Sei  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\int_{\underline{X}} f \, d\lambda \leq \overline{\int}_X f \, d\lambda. \quad (5.5)$$

**Beweis.** Für einfache Funktionen  $g_1, g_2$  findet man, dass  $g_1 \leq g_2$  impliziert  $\int_X g_1 d\lambda \leq \int_X g_2 d\lambda$ . Wenn es einfache Lebesgue-integrierbare Funktionen  $g_1, g_2$  gibt mit  $g_1 \leq f \leq g_2$ , dann folgt

$$\int_{\underline{X}} f \, d\lambda = \sup \left\{ \int_X g_1 \, d\lambda; \dots \right\} \leq \inf \left\{ \int_X g_2 \, d\lambda; \dots \right\} = \overline{\int}_X f \, d\lambda.$$

Wenn es keine solche Funktion  $g_1$  gibt, dann gilt  $\int_{\underline{X}} f \, d\lambda = \sup \emptyset = -\infty$ . Wenn es keine solche Funktion  $g_2$  gibt, dann gilt  $\overline{\int}_X f \, d\lambda = \inf \emptyset = \infty$ . Beide Male folgt (5.5). ■

**Definition 5.8 (Lebesgue-Integral)** Sei  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Wenn

$$\overline{\int}_X f \, d\lambda = \int_{\underline{X}} f \, d\lambda =: I \in \mathbb{R}, \quad (5.6)$$

heißt  $f$  **Lebesgue-integrierbar über  $X$** . Dieses  $I$  nennt man das **Lebesgue-Integral von  $f$  über  $X$**  und man schreibt

$$\int_X f \, d\lambda := I.$$

**Bemerkung 5.8.1** Auch hier trifft Bemerkung 5.5.1: wir hätten auch Funktionen  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$  betrachten können.

Übrigens, auch wenn  $f(X) \subset \mathbb{R}$  gilt, bedeutet das nicht, dass  $f$  beschränkt sein muss.

**Definition 5.9** • Für die Menge aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf  $X \subset \mathbb{R}^n$  schreibt man  $\mathcal{L}(X)$  oder  $\mathcal{L}^1(X)$ .

- Man nennt eine Funktion  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  **lokal Lebesgue-integrierbar auf  $X$** , wenn  $f \mathbf{1}_K : X \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-integrierbar ist für jede kompakte Teilmenge  $K \subset X$ .
- Für die Menge aller lokal Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf  $X \subset \mathbb{R}^n$  schreibt man  $\mathcal{L}_{\text{lok}}(X)$  oder  $\mathcal{L}_{\text{lok}}^1(X)$ .

**Lemma 5.10** Sei  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty)$ . Wenn man für jedes  $\varepsilon > 0$  zwei einfache Lebesgue-integrierbare Funktionen  $g_1, g_2 : X \rightarrow (-\infty, \infty)$  finden kann derart, dass

1.  $g_1 \leq f \leq g_2$  und
2.  $\int_X g_2 \, d\lambda \leq \int_X g_1 \, d\lambda + \varepsilon$ ,

dann ist  $f$  Lebesgue-integrierbar über  $X$  und

$$\int_X g_1 \, d\lambda \leq \int_X f \, d\lambda \leq \int_X g_2 \, d\lambda.$$

**Beweis.** Sei  $\varepsilon > 0$ , dann hat man einfache, Lebesgue-integrierbare Funktionen  $g_1, g_2$  mit

$$\int_X g_1 d\lambda \leq \int_{\underline{X}} f d\lambda \leq \int_X f d\lambda \leq \int_X g_2 d\lambda \leq \int_X g_1 d\lambda + \varepsilon.$$

Also gilt  $\int_{\underline{X}} f d\lambda \in \mathbb{R}$  und auch

$$\int_{\underline{X}} f d\lambda \leq \int_X f d\lambda \leq \int_{\underline{X}} f d\lambda + \varepsilon.$$

Weil diese Abschätzung für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt (5.6) und die Lebesgue-Integrierbarkeit. ■

Der wichtigste Unterschied vom Lebesgue-Integral zum Riemann-Integral ist die Vielzahl der Approximationsmöglichkeiten. Die elementaren Funktionen sind nun auf Lebesgue-messbare Mengen definiert und dürfen abzählbar viele Werte annehmen. Zum Beispiel ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ x & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

Lebesgue-integrierbar. Weil  $\mathbb{Q}$  abzählbar ist, ist diese Funktion sogar einfach. Weil  $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$  folgt

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 0.$$

**Bemerkung 5.10.1** Sei  $X$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , die uns erlaubt das Riemann-Integral über  $X$  zu definieren. Wenn  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar ist, dann ist  $f$  Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int_X f d\lambda = \int_X f(x) dx.$$

Diese Aussage trifft nicht unbedingt zu, wenn man sich das uneigentliche Riemann-Integral anschaut.

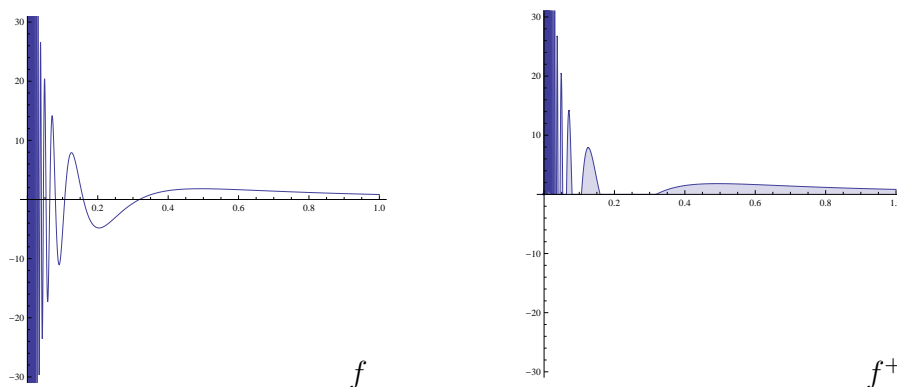


Abbildung 5.2: Skizzen zu  $f$  and  $f^+$  für  $f(x) = \sin(1/x)/x$

Für  $f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  existiert das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^1 f(x) dx := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx.$$

Der  $n$ -te Buckel von rechts in Abbildung 5.2 für  $f$ , gemeint ist der auf dem Intervall  $\left(\frac{1}{(n+1)\pi}, \frac{1}{n\pi}\right)$ , hat einen Flächeninhalt der Größenordnung  $\frac{1}{n}$ . Für das uneigentliche Riemann-Integral findet man so eine konvergente alternierende Folge ähnlich wie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n},$$

die jedoch nicht absolut konvergiert. Jedes obere Lebesgue-Integral für  $f^+$  liefert  $\infty$ .

## 5.2 Von stetig zu integrierbar

Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, wenn:

$$B \in \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),$$

bei dem  $\mathcal{T}$  die Standardtopologie in  $\mathbb{R}$  beziehungsweise in  $\mathbb{R}^n$  ist. Dann folgt auch

$$B \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Dies bedeutet, dass stetige Funktionen  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar sind. Theorem 4.2 hat uns gezeigt, dass die Borel-Mengen in  $\mathbb{R}^n$  in der Lebesgue- $\sigma$ -Algebra liegen. Also weil  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  gilt, folgt

$$B \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

und das liefert uns genau:

**Lemma 5.11** *Eine stetige Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar.*

Um zu zeigen, dass  $f$   $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$ -messbar ist, müsste man beweisen, dass

$$B \in \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Weil  $\mathcal{L} \supset \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$  gilt und weil  $\mathcal{L}$  viel mehr Mengen enthält als  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ , ist  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$ -messbar eine schwerere Bedingung als  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar.

Insgesamt findet man folgendes:

|  |               |  |  |
|--|---------------|--|--|
|  |               | $f$ ist $\mathcal{T}$ - $\mathcal{T}$ -stetig                              |  |
|  |               | $\Downarrow$   |  |
| $f$ ist $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ - $\mathcal{L}$ -messbar | $\Rightarrow$ | $f$ ist $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar |  |
| $\Downarrow$   |               | $\Downarrow$   |  |
| $f$ ist $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$ -messbar               | $\Rightarrow$ | $f$ ist $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar               |  |

Sonstige Implikationen zwischen diesen verschiedenen Typen von Messbarkeit gibt es so nicht.

In Analysis 1 hat man gesehen, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervallen Riemann-integrierbar sind. Das kann man für Lebesgue-integrierbar allgemeiner formulieren. Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar und setzen wir

$$A_{n,k} = f^{-1}([k2^{-n}, (k+1)2^{-n})).$$

Weil  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar ist, folgt aus der Tatsache, dass halboffene Intervalle  $[a, b)$  Borel-Mengen sind, dass die Mengen  $A_{n,k} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$   $\mathcal{L}$ -messbar sind. Dann folgt wiederum, dass

$$g_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k 2^{-n} \mathbf{1}_{A_{n,k}} \quad \text{und} \quad h_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (k+1) 2^{-n} \mathbf{1}_{A_{n,k}}$$

einfache  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$ -messbare Funktionen sind und außerdem gilt für  $x \in A_{n,k}$ , dass

$$g_n(x) = k 2^{-n} \leq f(x) \leq (k+1) 2^{-n} = h_n(x).$$

Weil die  $\{A_{n,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  disjunkt sind und weil  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_{n,k} = \mathbb{R}$ , folgt

$$g_n \leq f \leq h_n \leq g_n + 2^{-n} \quad \text{auf } X. \quad (5.7)$$

**Lemma 5.12** Sei  $\lambda(X) < \infty$  und nehme an, die Funktion  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist beschränkt<sup>1</sup> und  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar. Dann ist  $f$  Lebesgue-integrierbar über  $X$ .

**Beweis.** Man verwende (5.7), die Beschränktheit von  $f$  und  $\lambda(X) < \infty$ . ■

**Bemerkung 5.12.1** Weil stetige Funktionen auf kompakte Teilmengen beschränkt sind, ist  $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $f$  stetig und  $K$  kompakt, Lebesgue-integrierbar über  $K$ .

**Bemerkung 5.12.2** Die Beschränktheit von  $f$  kann man ersetzen durch die Integrierbarkeit einer dieser Funktionen  $g_n$ .

### 5.3 Kombinationen messbarer Funktionen

Wir haben nun messbar und integrierbar definiert aber haben Fragen, wie man mit solchen Funktionen rechnet, bis jetzt unbeachtet gelassen.

Einige Resultate, die nützlich sind wenn man mit  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbaren Funktionen rechnet, folgen:

**Theorem 5.13** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Seien  $f, g, f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar für  $k \in \mathbb{N}$ . Sei  $c \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch

$$cf, f+g, fg, |f|, \min(f, g), \max(f, g), \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k, \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k \quad \text{und} \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$$

$\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar. Wenn  $g(x) \neq 0$  für  $x \in X$  ist auch  $\frac{1}{g}$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar.

**Beweis.** Weil die offenen Intervalle eine Basis für  $\mathcal{T}$  bilden, reicht es, wenn wir nur die  $\mathcal{A}$ -Messbarkeit der Urbilder von Intervallen  $(a, b)$  zeigen. Weil

$$(a, b) = (a, \infty) \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (b - 2^{-n}, \infty)$$

können wir uns sogar beschränken auf Intervalle  $(a, \infty)$ .

1)  $cf$ . Für  $c > 0$  findet man

$$\begin{aligned} (cf)^{-1}(a, \infty) &= \{x \in X \text{ mit } cf(x) \in (a, \infty)\} \\ &= \{x \in X \text{ mit } f(x) \in (c^{-1}a, \infty)\} = f^{-1}(c^{-1}a, \infty) \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt beschränkt, wenn es eine Zahl  $M \in \mathbb{R}$  gibt derart, dass für alle  $x \in X$  gilt  $|f(x)| \leq M$ .

Für  $c < 0$  folgt ähnlich

$$(cf)^{-1}(a, \infty) = f^{-1}(-\infty, c^{-1}a) \in \mathcal{A}$$

und für  $c = 0$  finden wir

$$(cf)^{-1}(a, \infty) = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{A} & \text{falls } a \geq 0, \\ X \in \mathcal{A} & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

2)  $f + g$ . Man kann kontrollieren, dass

$$(f + g)^{-1}(a, \infty) = \bigcup_{\substack{p, q \in \mathbb{Q} \\ p+q > a}} (f^{-1}(p, \infty) \cap g^{-1}(q, \infty)),$$

und diese Menge ist  $\mathcal{A}$ -messbar als eine abzählbare Vereinigung von  $\mathcal{A}$ -messbaren Mengen.

3)  $fg$ . Weil  $fg = \frac{1}{2}(f + g)^2 - \frac{1}{2}f^2 - \frac{1}{2}g^2$  genügt es, wenn wir nur  $f^2$  betrachten:

$$(f^2)^{-1}(a, \infty) = \begin{cases} f^{-1}(\sqrt{a}, \infty) \cup f^{-1}(-\infty, -\sqrt{a}) & \text{für } a \geq 0, \\ X & \text{für } a < 0, \end{cases}$$

ist  $\mathcal{A}$ -messbar.

4)  $|f|$ . Man hat

$$|f|^{-1}(a, \infty) = \begin{cases} f^{-1}(a, \infty) \cup f^{-1}(-\infty, -a) & \text{für } a \geq 0, \\ X & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

5) Weil  $\min(f, g) = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g - \frac{1}{2}|f - g|$  und  $\max(f, g) = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}|f - g|$  folgt die Messbarkeit aus den vorhergehenden Ergebnissen.

6)  $\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k$ . Man verwende:

$$\left( \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k \right)^{-1} [a, \infty) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (f_k)^{-1} [a, \infty).$$

7)  $\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k$ . Man verwende:

$$\left( \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k \right)^{-1} (a, \infty) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (f_k)^{-1} (a, \infty).$$

8)  $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$ . Man verwende:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k = \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq m} f_k.$$

9)  $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$ . Ähnlich wie beim  $\liminf$ .

10)  $\frac{1}{g}$ . Das wird eine Hausaufgabe. ■

## 5.4 Von integrierbar zu fast stetig

**Lemma 5.14** Eine lokal Lebesgue-integrierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar.

**Beweis.** Auf jeder abgeschlossenen Kugel  $\overline{B_R(0)}$  ist  $f$  Lebesgue-integrierbar. Dann existieren für jede  $n \in \mathbb{N}^+$  einfache Lebesgue-integrierbare Funktionen  $g_n, h_n : \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$g_n \leq f \leq h_n$$

und

$$\int_{\overline{B_R(0)}} g_n \, d\lambda \leq \int_{\overline{B_R(0)}} f \, d\lambda \leq \int_{\overline{B_R(0)}} h_n \, d\lambda \leq \int_{\overline{B_R(0)}} g_n \, d\lambda + \frac{1}{n}. \quad (5.8)$$

Setzen wir  $g_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$  und  $h_\infty = \inf_{n \in \mathbb{N}} h_n$ , dann sind  $g_\infty$  und  $h_\infty$   $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar auf  $\overline{B_R(0)}$  und außerdem gilt

$$g_\infty \leq f \leq h_\infty, \\ \int_{\overline{B_R(0)}} g_\infty \, d\lambda = \int_{\overline{B_R(0)}} h_\infty \, d\lambda.$$

Setzt man  $D_n = \left\{ x \in \overline{B_R(0)}; |g_\infty(x) - h_\infty(x)| > \frac{1}{n} \right\}$ , dann gilt

$$\lambda(D_n) = 0.$$

Weil

$$D_\infty = \left\{ x \in \overline{B_R(0)}; |g_\infty(x) - h_\infty(x)| \neq 0 \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} D_n$$

hat man  $\lambda(D_\infty) = 0$ . Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  hat man

$$g_\infty^{-1}(a, \infty) \subset \left( f^{-1}(a, \infty) \cap \overline{B_R(0)} \right) \subset h_\infty^{-1}(a, \infty),$$

und weil  $\lambda(D_\infty) = 0$  gilt, ist  $h_\infty^{-1}(a, \infty) \setminus g_\infty^{-1}(a, \infty)$  eine Nullmenge. Weil

$$h_\infty^{-1}(a, \infty) \setminus \left( f^{-1}(a, \infty) \cap \overline{B_R(0)} \right)$$

eine Teilmenge einer Nullmenge ist und weil  $\mathcal{L}$  vollständig ist, ist diese Menge und auch  $f^{-1}(a, \infty) \cap \overline{B_R(0)}$   $\mathcal{L}$ -messbar. Dann ist auch  $f^{-1}(a, \infty) = \bigcup_{R \in \mathbb{N}^+} f^{-1}(a, \infty) \cap \overline{B_R(0)}$   $\mathcal{L}$ -messbar. Wir finden, dass die Funktion  $f$   $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar ist. ■

**Beispiel 5.15** Funktion  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ist  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$ -messbar, sogar Lebesgue-integrierbar auf  $\mathbb{R}$ , aber auch nirgends stetig. Denn für jedes  $x \in \mathbb{R}$  und  $\delta > 0$  gibt es  $y \in \mathbb{R}$  mit  $|x - y| < \delta$  und  $|\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) - \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(y)| > \frac{1}{2}$ . Jedoch  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$  ist eine messbare Funktion und nicht sehr weit entfernt von einer stetigen Funktion. Für jedes beschränkte Intervall  $[a, b]$  und  $\varepsilon > 0$  kann man eine kompakte Teilmenge  $K \subset [a, b]$  finden mit  $\lambda([a, b] \setminus K) < \varepsilon$  derart, dass  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist. Eine Konstruktion von  $K$  ist zum Beispiel die folgende.

Sei  $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine Abzählung von  $\mathbb{Q} \cap [a, b]$  und setze

$$K = [a, b] \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (q_i - 2^{-2-i}\varepsilon, q_i + 2^{-2-i}\varepsilon).$$

Man zeigt direkt, dass  $K$  beschränkt, abgeschlossen und darum auch kompakt ist, und dass  $\lambda([a, b] \setminus K) < \varepsilon$  gilt. Weil  $(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}})|_K = 0$ , ist diese Funktion sogar konstant auf  $K$ .

Obwohl dieses Beispiel zeigt, dass messbare und integrierbare Funktionen nirgends stetig zu sein brauchen, zeigt das folgende Ergebnis, dass eine messbare Funktion doch auch wieder nicht sehr weit entfernt ist von einer stetigen Funktion.

**Theorem 5.16 (Lusin)** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_T$ -messbar, sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ , mit  $A \in \mathcal{L}$  und  $\lambda(A) < \infty$ , und sei  $\varepsilon > 0$ , dann existiert eine kompakte Menge  $K \subset A$  derart, dass

1.  $\lambda(A \setminus K) < \varepsilon$  und
2.  $f|_K$  ist stetig.

**Bemerkung 5.16.1** Das ursprüngliche Theorem ist allgemeiner formuliert. Wir haben uns das Theorem von Lusin zurechtgeschnitten für das Lebesgue-Maß.

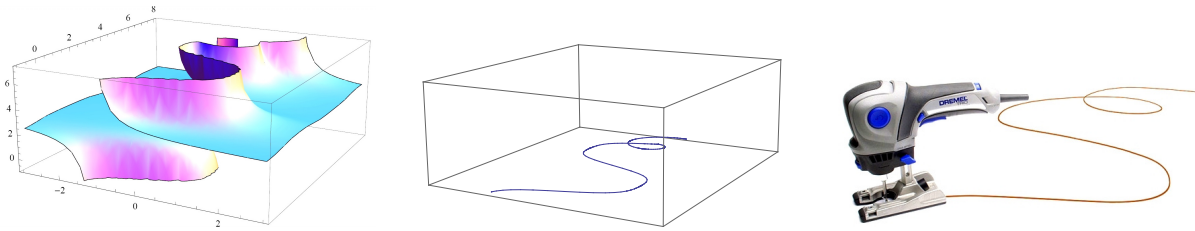


Abbildung 5.3: Man kann eine beliebig kleine Menge aus dem Definitionsbereich herausnehmen und bekommt eine stetige Funktion auf dem Rest.

**Beweis.** Setze  $B_{i,j} = [\frac{j}{i+1}, \frac{j+1}{i+1})$  für  $i \in \mathbb{N}$  und  $j \in \mathbb{Z}$ . Für jedes  $i \in \mathbb{N}$  hat man  $\mathbb{R} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} B_{i,j}$ . Als nächstes definieren wir

$$A_{i,j} = A \cap f^{-1}(B_{i,j}).$$

Bemerke, dass  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A_{i,j} = A$ . Weil  $f$  eine messbare Funktion ist, sind sowohl  $f^{-1}(B_{i,j})$  als auch  $A_{i,j}$  messbar. Wegen Theorem 4.5 gibt es kompakte  $K_{i,j} \subset A_{i,j}$  mit  $\lambda(A_{i,j} \setminus K_{i,j}) < 2^{-3-i-|j|}\varepsilon$ . Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \lambda\left(A \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} K_{i,j}\right) &= \lambda\left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A_{i,j} \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} K_{i,j}\right) \leq \\ &\leq \lambda\left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} (A_{i,j} \setminus K_{i,j})\right) \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-3-i-|j|}\varepsilon < 2^{-1-i}\varepsilon. \end{aligned}$$

Dann gibt es  $N_{\varepsilon,i} \in \mathbb{N}$  mit

$$\lambda\left(A \setminus \bigcup_{|j| \leq N_{\varepsilon,i}} K_{i,j}\right) < 2^{-1-i}\varepsilon.$$

Definieren wir  $K_i = \bigcup_{|j| \leq N_{\varepsilon,i}} K_{i,j}$  und  $f_i : K_i \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f_i(x) = \frac{j}{i+1} \text{ falls } x \in K_{i,j}.$$

Weil die  $\{A_{i,j}\}_{j \in \mathbb{Z}}$  und deshalb auch die  $\{K_{i,j}\}_{j \in \mathbb{Z}}$  disjunkt sind, sind diese Funktionen wohldefiniert. Weil die  $K_{i,j}$  kompakt sind, gilt  $d(K_{i,j_1}, K_{i,j_2}) > 0$  für  $j_1 \neq j_2$  und die  $f_i$  sind stetig auf  $K_i$ . Außerdem sind die  $f_i$  so definiert, dass

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{1}{i+1} \text{ für alle } x \in K_i.$$

Nun setzen wir  $K = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$ . Die Menge  $K$  ist kompakt und

$$\lambda(A \setminus K) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A \setminus K_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-1-i} \varepsilon = \varepsilon.$$

Außerdem gilt, dass die  $f_i$  stetig sind auf  $K$  und dass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = f \text{ gleichmäßig auf } K.$$

Dann ist auch  $f$  stetig auf  $K$ . ■

## 5.5 Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

Für das Lebesgue-Integral gibt es ähnliche Ergebnisse wie beim Riemann-Integral.

**Lemma 5.17** *Seien  $f_1, f_2 : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-integrierbar über  $X$  und sei  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , dann ist  $\alpha f_1 + \beta f_2$  Lebesgue-integrierbar über  $X$  und*

$$\int_X (\alpha f_1 + \beta f_2) d\lambda = \alpha \int_X f_1 d\lambda + \beta \int_X f_2 d\lambda.$$

**Bemerkung 5.17.1** *Die Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen über  $X$ , also  $\mathcal{L}(X)$ , bilden einen Vektorraum. Wenn man dabei eine Norm haben möchte, könnte man sich überlegen, ob  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$  definiert durch*

$$\|f\|_{\mathcal{L}(X)} = \int_X |f| d\lambda$$

*vernünftig wäre. Die meisten Eigenschaften einer Norm sind erfüllt. Aus  $\|f\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$  folgt aber nicht, dass  $f = 0$  sondern nur  $\lambda(\{x \in X; f(x) \neq 0\}) = 0$ .*

**Beweis.** Wenn  $\alpha$  und  $\beta$  positiv sind, kann man aus einfachen Funktionen  $g_1 = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_{1,i} \mathbf{1}_{A_{1,i}}$  oberhalb von  $f_1$  und  $g_2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_{2,i} \mathbf{1}_{A_{2,i}}$  oberhalb von  $f_2$  eine neue konstruieren, die oberhalb der Summe  $\alpha f_1 + \beta f_2$  liegt. Man definiere

$$g = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} (\alpha y_{1,i} + \beta y_{2,j}) \mathbf{1}_{A_{1,i} \cap A_{2,j}}. \quad (5.9)$$

Mit (5.9) und Lemma 5.10 kann man nun das gewünschte Resultat bekommen. Wenn zum Beispiel  $\alpha < 0$ , dann verwendet man für diese Konstruktion eine unterhalb liegende einfache Funktion. Eine ähnliche Änderung ist notwendig falls  $\beta < 0$ . ■

Im folgenden Lemma nehmen wir an, dass auch  $X_1$  und  $X_2$  Lebesgue-messbar sind.

**Lemma 5.18** *Sei  $f : X_1 \cup X_2 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-integrierbar über  $X_1$  und über  $X_2$ . Wenn  $\lambda(X_1 \cap X_2) = 0$ , dann gilt:  $f$  ist Lebesgue-integrierbar über  $X_1 \cup X_2$  und*

$$\int_{X_1 \cup X_2} f d\lambda = \int_{X_1} f d\lambda + \int_{X_2} f d\lambda.$$

**Beweis.** Für den Leser. ■



**Lemma 5.19** Falls  $f_1, f_2 : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-integrierbar sind über  $X$  und  $f_1 \leq f_2$ , dann gilt

$$\int_X f_1 \, d\lambda \leq \int_X f_2 \, d\lambda.$$

**Beweis.** Für den Leser. ■

**Lemma 5.20** Falls  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-integrierbar ist über  $X$ , dann sind  $f^+$ ,  $f^-$  und  $|f|$  Lebesgue-integrierbar über  $X$  und es gilt

$$\left| \int_X f \, d\lambda \right| \leq \int_X |f| \, d\lambda.$$

**Beweis.** Für den Leser. ■



# Analysis 3, Woche 6

## Diverse Konvergenzarten



### 6.1 Lebesgue-Klassen

Von den messbaren Mengen sind die Nullmengen eigentlich nicht sehr interessant. Man bemerkt sie kaum, weil sie so klein sind. Ebenso ist es, wenn man messbare Funktionen betrachtet, meistens nicht sehr interessant, was diese auf Nullmengen machen. Werden Funktionen integriert, dann ist der Wert des Integrals unabhängig von den Funktionswerten auf Nullmengen. Für Funktionen, die nur auf Nullmengen verschieden sind, definiert man daher folgendes.

**Definition 6.1** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Sei  $A \in \mathcal{A}$  und seien  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbare Funktionen. Man sagt

$$f = g \text{ } \mu\text{-fast-überall auf } A \subset X,$$

wenn  $\mu \{x \in A; f(x) \neq g(x)\} = 0$ . Abgekürzt:  $f = g$   $\mu$ -f.ü.<sup>1</sup>

Für die  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbaren Funktionen auf  $X \subset \mathbb{R}^n$  definiert man so eine Äquivalenzrelation:

$$f \sim g \text{ auf } X \text{ genau dann, wenn } f = g \text{ } \lambda\text{-f.ü. auf } X.$$

Für die Menge der Äquivalenzklassen von  $\mathcal{L}^1(X)$  bezüglich  $\sim$  wird die folgende Schreibweise verwendet:

$$L^1(X) := \mathcal{L}^1(X) / \sim .$$

Das Auswahlaxiom erlaubt uns, aus jeder Klasse  $\mathbf{f} \in L^1(X)$  einen Vertreter  $f \in \mathcal{L}^1(X)$  zu finden, und man definiert

$$\|\mathbf{f}\|_{L^1(X)} := \int_X |f| \, d\lambda.$$

Für diesen Vektorraum  $L^1(X)$  ist  $\|\cdot\|_{L^1(X)}$  eine Norm. Man bemerke, dass diese Norm nicht abhängt vom gewählten Vertreter: Wenn  $f_1$  und  $f_2$  beide  $\mathbf{f}$  vertreten, dann heißt das  $f_1 = f_2$   $\lambda$ -f.ü. Es bedeutet auch, dass eine einfache Funktion oberhalb von  $|f_1|$  nur auf Nullmengen geändert werden muss (man ersetzt den Funktionswert dieser einfachen Funktion auf diesen Nullmengen durch  $\infty$ ), um eine einfache Funktion oberhalb von  $|f_2|$  zu finden. Ähnliches gilt für einfache Funktionen unterhalb von  $|f_1|$  und man findet

$$\int_X |f_1| \, d\lambda = \int_X |f_2| \, d\lambda.$$

<sup>1</sup>Auf Englisch: f.ü = a.e. (almost everywhere)

**Lemma 6.2** Sei  $X \subset \mathbb{R}^n$   $\mathcal{L}$ -messbar. Dann ist  $(L^1(X), \|\cdot\|_{L^1(X)})$  ein normierter Raum.

**Beweis.** Wir haben schon gesehen, dass  $\|\mathbf{f}\|_{L^1(X)}$  wohldefiniert ist für  $\mathbf{f} \in L^1(X)$  und müssen nur noch zeigen, dass die Eigenschaften einer Norm erfüllt sind.

1.  $\|\mathbf{f}\|_{L^1(X)} \geq 0$  folgt direkt. Wenn  $\|\mathbf{f}\|_{L^1(X)} = 0$ , dann bedeutet dies, dass  $\int_X |f| d\lambda = 0$  für einen Vertreter  $f$  von  $\mathbf{f}$ . Wenn  $\int_X |f| d\lambda = 0$  folgt  $f = 0$   $\lambda$ -f.ü. und das bedeutet wiederum  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  in  $L^1(X)$ . Hier ist  $\mathbf{0}$  die Klasse der Funktionen, die die Funktion 0 enthält.

2. Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Wenn  $f$  ein Vertreter von  $\mathbf{f}$  ist, ist  $\alpha f$  ein Vertreter von  $\alpha \mathbf{f}$ , und es folgt

$$\|\alpha \mathbf{f}\|_{L^1(X)} = \int_X |\alpha f| d\lambda = |\alpha| \int_X |f| d\lambda = |\alpha| \|\mathbf{f}\|_{L^1(X)}.$$

3. Ähnlich folgt, dass  $f + g$  ein Vertreter von  $\mathbf{f} + \mathbf{g}$  ist, und

$$\|\mathbf{f} + \mathbf{g}\|_{L^1(X)} = \int_X |f + g| d\lambda \leq \int_X (|f| + |g|) d\lambda = \|\mathbf{f}\|_{L^1(X)} + \|\mathbf{g}\|_{L^1(X)}.$$

■

## 6.2 Konvergenz bei messbaren Funktionen

In dem Beweis von Theorem 5.16 haben wir die Konvergenz von (gleichmäßig) stetigen Funktionen verwendet. Wir erinnern uns an das Theorem aus Analysis 2, dass für eine Folge von stetigen Funktionen  $\{f_i : K \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in \mathbb{N}}$ , die gleichmäßig konvergieren, auch die Grenzfunktion  $f$  mit  $f(x) := \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x)$  wieder stetig ist. Wie geht man bei Konvergenz von  $\lambda$ -messbaren Funktionen vor?

Für ein Maß  $\mu$  definieren wir die  $\mu$ -f.ü.-Konvergenz wie folgt:

**Definition 6.3 (Fast-überall-Konvergenz)** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Sei  $A \in \mathcal{A}$  und seien  $f_k, f : A \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $k \in \mathbb{N}$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbare Funktionen. Man sagt:

$$f_k \rightarrow f \text{ für } k \rightarrow \infty \text{ } \mu\text{-fast-überall auf } A \subset X,$$

wenn es eine messbare Menge  $B \subset A$  gibt mit  $\mu(A \setminus B) = 0$  und  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  für alle  $x \in B$ .

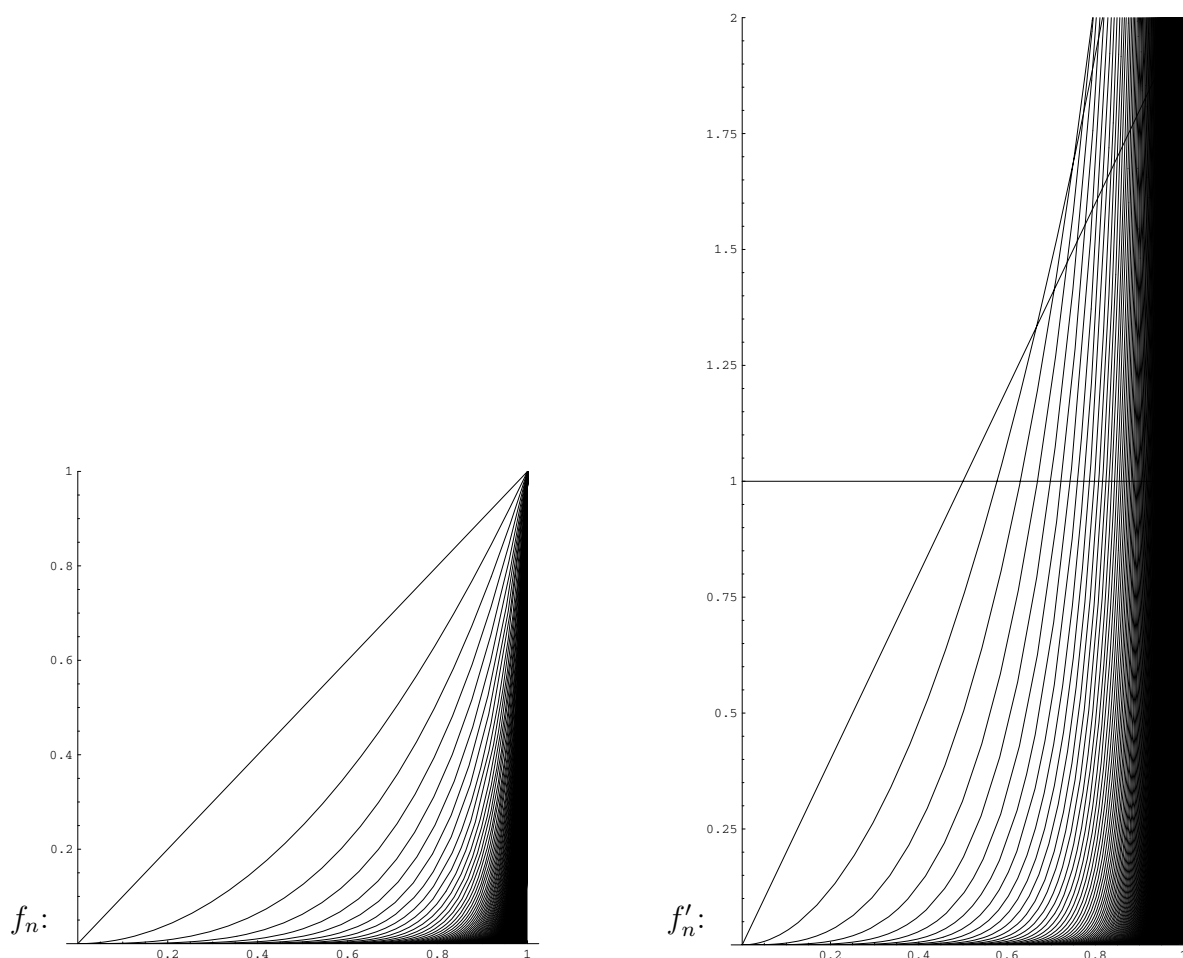
**Bemerkung 6.3.1** Für  $x \in A \setminus B$  darf die Folge  $f_k(x)$  divergieren oder auch konvergieren gegen einen beliebigen Wert.

**Beispiel 6.4** Definieren wir für  $n \in \mathbb{N}^+$  die Funktionen  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f_n(x) = x^n$ , dann gilt

$$f_n \rightarrow 0 \text{ } \lambda\text{-f.ü. auf } [0, 1].$$

Sogar gilt

$$f'_n \rightarrow 0 \text{ } \lambda\text{-f.ü. auf } [0, 1].$$

Abbildung 6.1: Skizzen zu  $f_n(x) = x^n$ 

**Definition 6.5 (Konvergenz in  $\mathcal{L}^1(X)$ )** Sei  $f, f_k \in \mathcal{L}^1(X)$  für  $k \in \mathbb{N}$ .

Man sagt  $f_k \rightarrow f$  in  $\mathcal{L}^1(X)$ , wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_{\mathcal{L}^1(X)} = 0.$$

**Bemerkung 6.5.1** Die Grenzfunktion ist nicht eindeutig; man kann nur sagen, dass alle möglichen Grenzfunktionen zu  $f_k$  genau eine Klasse aus  $L^1(X)$  bilden.

Für die Funktionen  $f_n(x)$  des letzten Beispiels gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\mathcal{L}^1([0,1])} = 0$ . Weil  $\|f'_n\|_{\mathcal{L}^1([0,1])} = 1$  konvergieren die Ableitungen nicht nach 0. Konvergieren sie vielleicht gegen eine andere Funktion  $g$ ? Man kann zeigen, dass  $\|f'_n\|_{\mathcal{L}^1([0,1-\varepsilon])} \rightarrow 0$  für  $\varepsilon > 0$ . Dann folgt  $g = 0$   $\lambda$ -f.ü. auf  $[0, 1 - \varepsilon]$ . Weil dies für ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt  $g = 0$  auf  $[0, 1)$ . Dann gilt  $\|g\|_{\mathcal{L}^1([0,1])} = 0$  und folgt der Widerspruch, denn

$$\|f'_n - g\|_{\mathcal{L}^1([0,1])} \geq \|f'_n\|_{\mathcal{L}^1([0,1])} - \|g\|_{\mathcal{L}^1([0,1])} = \|f'_n\|_{\mathcal{L}^1([0,1])} \rightarrow 1.$$

**Definition 6.6 (Konvergenz im Maß)** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Sei  $A \in \mathcal{A}$  und seien  $f_k, f : A \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $k \in \mathbb{N}$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}$ -messbare Funktionen. Man sagt:

$$f_k \rightarrow f \text{ nach dem Maß } \mu \text{ auf } A \subset X,$$

wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu \{x \in A; |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Diese verschiedenen Arten von Konvergenz sind nicht unabhängig. In Abbildung 6.2 findet man einige Zusammenhänge. Weiter ist es so, dass wenn  $f_k \rightarrow f$  konvergiert in Typ 1 und  $f_k \rightarrow g$  konvergiert in Typ 2, nicht unbedingt  $f = g$  gelten muss. Wenn beide Konvergenztypen mit Hilfe des  $\lambda$ -Maßes definiert sind, folgt meistens nur  $f = g$   $\lambda$ -f.ü. Es folgen einige Beispiele zu den „ $\nRightarrow$ “-en in dem Bild. Die Implikationen in dem Bild kann man direkt zeigen.

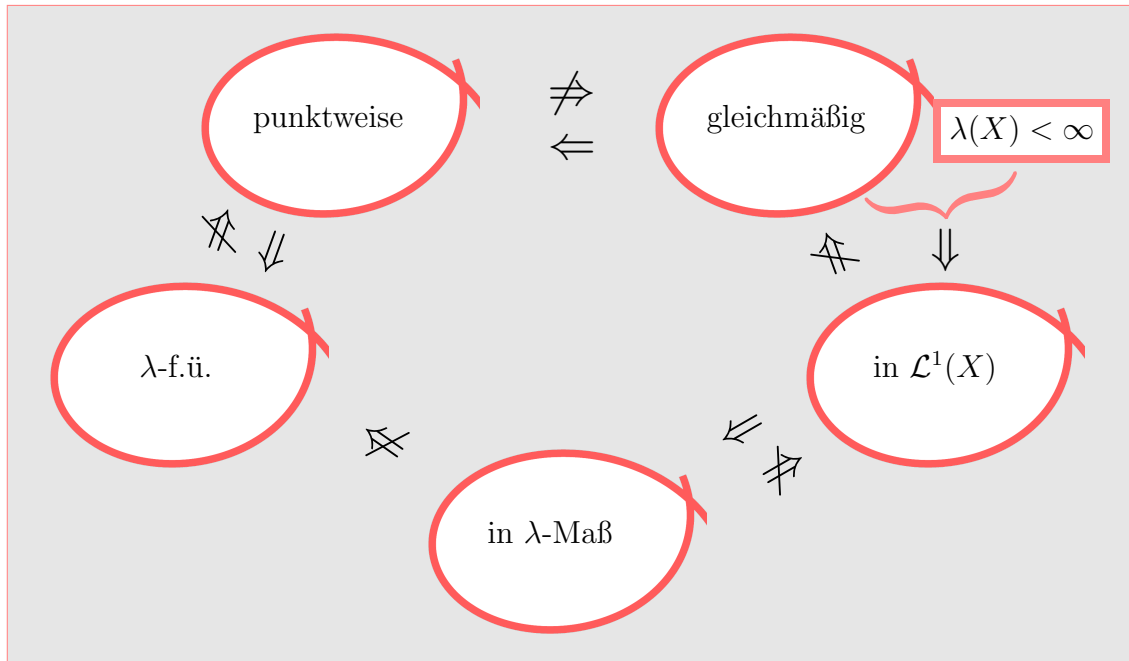


Abbildung 6.2: Zusammenhang einiger Konvergenzbegriffe

**Beispiel 6.7** Die Funktionenfolge  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_k(x) = e^{-|x-k|^2}$  konvergiert punktweise (nach 0), aber nicht gleichmäßig. Sie konvergiert auch nicht nach dem Maß  $\lambda$ . Siehe Abbildung 6.3.

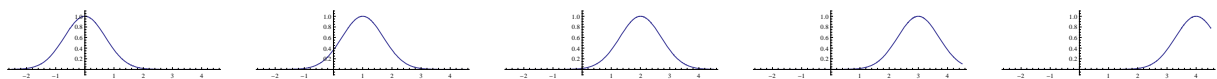


Abbildung 6.3: Skizze zu Beispiel 6.7.

**Beispiel 6.8** Die Funktionenfolge  $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_k(x) = kx(1-x)^k$  konvergiert punktweise (nach 0), aber nicht gleichmäßig. Sie konvergiert in  $\mathcal{L}^1([0, 1])$ .

Die punktweise Konvergenz findet man für  $x \in (0, 1)$ , weil  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\ln k - a k) = -\infty$  für alle  $a > 0$  impliziert, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} kx(1-x)^k = x \lim_{k \rightarrow \infty} \exp\left(\ln k - \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)k\right) = 0.$$

Für  $x \in \{0, 1\}$  folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$  weil  $f_k(0) = 0 = f_k(1)$ .

Die Folge konvergiert nicht gleichmäßig nach 0, weil

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{k}\right)^k = e^{-1}.$$

Die Konvergenz nach 0 in  $\mathcal{L}^1([0, 1])$  folgt aus

$$\begin{aligned} \|f_k - 0\|_{\mathcal{L}^1([0,1])} &= \int_{(0,1)} f_k d\lambda = \int_0^1 kx(1-x)^k dx = k \int_0^1 \left( -(1-x)^{k+1} + (1-x)^k \right) dx = \\ &= \left[ \frac{k}{k+2} (1-x)^{k+2} - \frac{k}{k+1} (1-x)^{k+1} \right]_0^1 = \frac{k}{k+1} - \frac{k}{k+2} = \frac{k}{(k+1)(k+2)} < \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

Siehe Abbildung 6.4 für die Skizzen zu einigen dieser Funktionen.

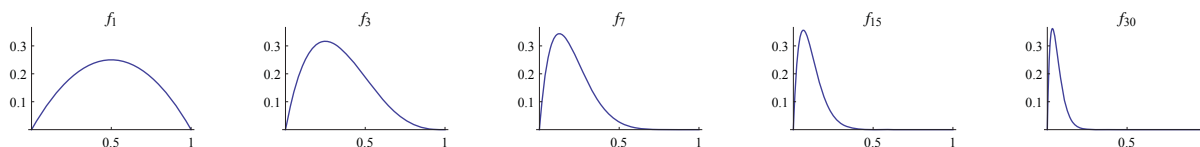


Abbildung 6.4: Skizze zu Beispiel 6.8.

**Beispiel 6.9** Die Funktionenfolge  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_k(x) = \sqrt{k}e^{-kx^2}$  konvergiert  $\lambda$ -f.ü. und nach dem Maß  $\lambda$  (nach 0), aber nicht punktweise und nicht in  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Siehe Abbildung 6.5.

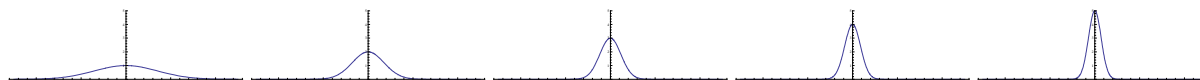


Abbildung 6.5: Skizze zu Beispiel 6.9.

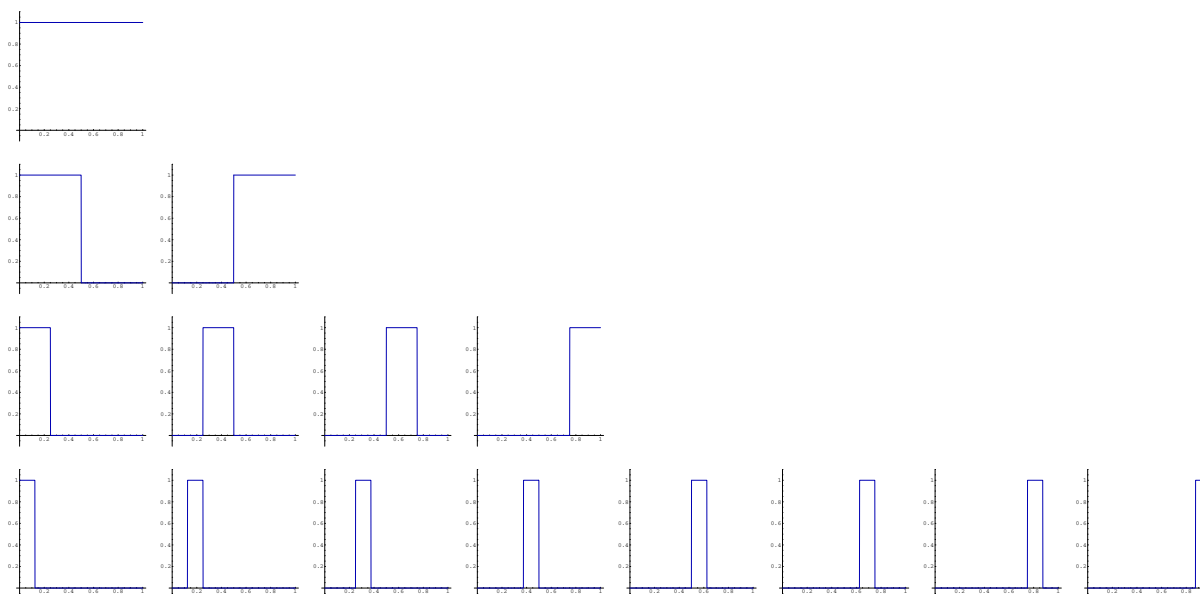


Abbildung 6.6: Skizzen zu der Funktionenfolge aus Beispiel 6.10

**Beispiel 6.10** Setzen wir  $g_{k,m}(x) = \mathbf{1}_{[k2^{-m}, (k+1)2^{-m}]}$  für  $m \in \mathbb{N}$  und  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2^m - 1\}$ . Die Funktionenfolge  $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} := \{g_{0,0}, g_{0,1}, g_{1,1}, g_{0,2}, g_{1,2}, g_{2,2}, g_{3,2}, g_{0,3}, g_{1,3}, g_{2,3}, \dots\}$$

konvergiert in  $\mathcal{L}^1([0, 1])$  und nach dem Maß  $\lambda$  (nach 0), aber nicht punktweise. Eine Skizze dieser Funktionen findet man in Abbildung 6.6.

**Beispiel 6.11** Die Funktionenfolge  $h_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h_k(x) = kf_k(x)$  und  $f_k$ , wie im letzten Beispiel, konvergiert nach dem Maß  $\lambda$  (nach 0), aber nicht in  $\mathcal{L}^1([0, 1])$  oder  $\lambda$ -f.ü.

### 6.3 Egoroff's Konvergenzsatz

Wenn eine Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert auf  $A \subset \mathbb{R}^n$  und  $\lambda(A) < \infty$ , dann folgt auch Konvergenz im Maß und in  $\mathcal{L}^1(A)$ . Gleichmäßige Konvergenz ist eine sehr 'starke' Konvergenz. Trotzdem ist sie nicht sehr weit von Fast-überall-Konvergenz entfernt.

**Theorem 6.12 (Egoroff<sup>2</sup>)** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Sei  $A \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(A) < \infty$  und seien  $f_k, f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbare Funktionen mit

$$f_k \rightarrow f \quad \mu\text{-fast-überall auf } A \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Dann gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  eine  $\mathcal{A}$ -messbare Menge  $B \subset A$  derart, dass

1.  $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$  und
2.  $f_k \rightarrow f$  gleichmäßig auf  $B$ .

**Beweis.** Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir definieren für  $i, j \in \mathbb{N}$  die  $\mathcal{A}$ -messbaren Mengen

$$C_{i,j} = \bigcup_{k \geq j} \{x \in A; |f_k(x) - f(x)| \geq 2^{-i}\}.$$

Weil  $C_{i,j} \supset C_{i,j+1}$  für alle  $i, j \in \mathbb{N}$  folgt

$$\infty > \mu(A) \geq \mu(C_{i,1}) \geq \dots \geq \mu(C_{i,j}) \geq \mu(C_{i,j+1}) \geq \dots \geq 0.$$

Also existiert  $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(C_{i,j})$  als Grenzwert einer fallenden beschränkten Folge. Wenn für  $x \in A$  gilt, dass  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  für  $k \rightarrow \infty$ , dann gilt  $|f_k(x) - f(x)| < 2^{-i}$  für alle  $k \geq k_i$  mit  $k_i$  genügend groß, und es folgt  $x \notin C_{i,j}$  für  $j \geq k_i$ . Weil  $f_k \rightarrow f$   $\mu$ -fast-überall auf  $A$ , hat man  $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(C_{i,j}) = 0$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es für jedes  $i \in \mathbb{N}$  ein  $N_{i,\varepsilon} \in \mathbb{N}$  derart, dass  $\mu(C_{i,N_{i,\varepsilon}}) < 2^{-i-1}\varepsilon$ . Wir setzen

$$B = A \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{i,N_{i,\varepsilon}}$$

und können folgern, dass

$$\mu(A \setminus B) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{i,N_{i,\varepsilon}}\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(C_{i,N_{i,\varepsilon}}) < \varepsilon.$$

Für alle  $x \in B$ ,  $k > N_{i,\varepsilon}$  hat man  $|f_k(x) - f(x)| < 2^{-i}$  und das besagt, dass  $f_k \rightarrow f$  gleichmäßig konvergiert auf  $B$ . ■

**Korollar 6.13** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Sei  $A \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(A) < \infty$  und seien  $f_k, f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbare Funktionen. Wenn

$$f_k \rightarrow f \quad \mu\text{-f.ü. auf } A \text{ für } k \rightarrow \infty,$$

dann gilt

$$f_k \rightarrow f \text{ im } \mu\text{-Maß auf } A \text{ für } k \rightarrow \infty.$$



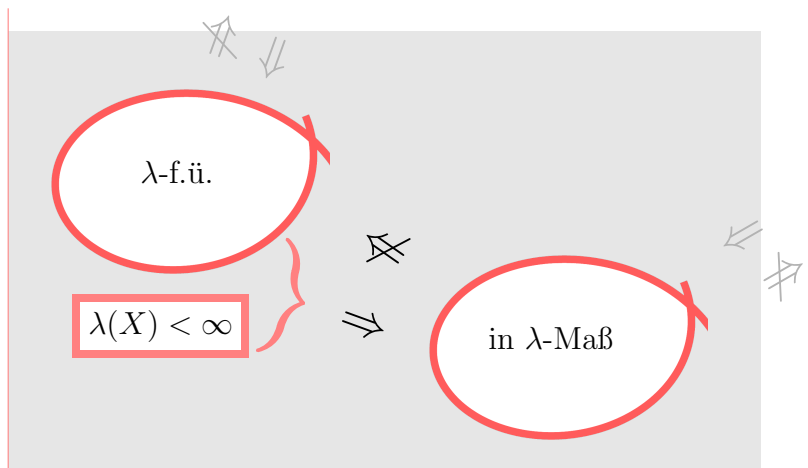


Abbildung 6.7: Eine Erweiterung von Abbildung 6.2

**Beweis.** Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir werden zeigen, dass es für beliebiges  $\delta > 0$  ein  $k_{\varepsilon, \delta} \in \mathbb{N}$  gibt derart, dass für  $k > k_{\varepsilon, \delta}$  gilt

$$\mu \{x \in A; |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\} < \delta. \quad (6.1)$$

Wegen des Satzes von Egoroff gibt es  $A_\delta \subset A$  mit  $\lambda(A \setminus A_\delta) < \delta$  und  $f_k \rightarrow f$  gleichmäßig auf  $A_\delta$ . Dann gibt es also ein  $k_{\delta, \varepsilon}$  derart, dass für  $k > k_{\delta, \varepsilon}$  gilt

$$\sup_{x \in A_\delta} |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dies bedeutet, dass für  $k \geq k_{\delta, \varepsilon}$

$$\{x \in A; |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\} \subset A \setminus A_\delta,$$

und wir finden (6.1). ■

## 6.4 Integrale mit Werten in $[0, \infty]$

Wir haben das Lebesgue-Integral in Definition 5.3 erst für einfache positive Funktionen definiert und haben Werte in  $[0, \infty]$  erlaubt. Wenn man vorzeichenwechselnde Funktionen betrachtet, dann hat man ein Problem, wenn sowohl  $\int_X f^+ d\lambda = \infty$ , als auch  $\int_X f^- d\lambda = \infty$  gilt. Das haben wir vermieden, indem wir nur endliche Werte zugelassen haben. Für die nächsten Kapitel, wo manchmal Integrale für nicht-negative Funktionen betrachtet werden, ist es bequem, hierauf zurückzukommen und wiederum Werte in  $[0, \infty]$  zu erlauben. Das heißt, wenn  $f \geq 0$  Lebesgue-messbar auf  $X$  ist und

$$\sup \left\{ \int_X g d\lambda; g : X \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ ist einfach, Lebesgue-integrierbar und } g \leq f \right\} = \infty \quad (6.2)$$

dann setzen wir

$$\int_X f d\lambda = \infty. \quad (6.3)$$

<sup>2</sup>Am Anfang des letzten Jahrhunderts wurden kyrillische Buchstaben anders "übersetzt" als heutzutage. Statt Lusin und Egoroff würde man jetzt Luzin und Egorov schreiben. Aus Gewohnheit hat man die alte Schreibweise beibehalten.

**Lemma 6.14** Für jede nicht-negative  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_T$ -messbare Funktion  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $\int_X f \, d\lambda \in [0, \infty]$ . Genauer gesagt, entweder

1.  $f$  ist Lebesgue-integrierbar wie in Definition 5.6 und  $\int_X f \, d\lambda \in [0, \infty)$ , oder
2. (6.2) gilt und man setzt  $\int_X f \, d\lambda = \infty$ .

**Bemerkung 6.14.1** Nur im ersten Fall, also wenn  $\int_X f \, d\lambda \in [0, \infty)$  gilt, nennt man  $f$  Lebesgue-integrierbar.

**Beweis.** Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir betrachten  $X_k = \{x \in X; k \leq \|x\| < k+1\}$ . Dann gilt  $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$  und  $\lambda(X_k) \leq (2k+2)^n$ . Wir setzen  $\varepsilon_k = (2k+2)^{-n} 2^{-k-1} \varepsilon$  und

$$A_{j,k} = f^{-1}[j\varepsilon_k, (j+1)\varepsilon_k) \cap X_k$$

und definieren die einfachen Funktionen

$$g_\varepsilon = \sum_{j,k \in \mathbb{N}} j\varepsilon_k \mathbf{1}_{A_{j,k}} \quad \text{und} \quad h_\varepsilon = \sum_{j,k \in \mathbb{N}} (j+1)\varepsilon_k \mathbf{1}_{A_{j,k}}.$$

Es folgt, dass

$$\int_{X_k} g_\varepsilon \, d\lambda \leq \int_{\underline{X_k}} f \, d\lambda \leq \overline{\int_{X_k} f \, d\lambda} \leq \int_{X_k} h_\varepsilon \, d\lambda \leq \int_{X_k} g_\varepsilon \, d\lambda + \varepsilon_k \lambda(X_k)$$

und weil wir  $\varepsilon_k$  so definiert haben, dass

$$\varepsilon_k \lambda(X_k) \leq 2^{-k-1} \varepsilon$$

folgt sogar

$$\int_X g_\varepsilon \, d\lambda \leq \int_{\underline{X}} f \, d\lambda \leq \overline{\int_X f \, d\lambda} \leq \int_X h_\varepsilon \, d\lambda \leq \int_X g_\varepsilon \, d\lambda + \varepsilon.$$

Also entweder  $\int_X g_\varepsilon \, d\lambda$  und  $\int_X h_\varepsilon \, d\lambda$  sind endlich und wir können aus Lemma 5.10 folgern, dass die erste Möglichkeit zutrifft. Wenn  $\int_X g_\varepsilon \, d\lambda = \infty$  zutrifft, folgt die zweite Möglichkeit. ■

# Analysis 3, Woche 7

## Limes und Integral



### 7.1 Das Lemma von Fatou

**Theorem 7.1 (Das Lemma von Fatou<sup>1</sup>)** Sei  $X \in \mathcal{L}$  und  $f_k : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  mit  $k \in \mathbb{N}$  eine Folge  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbarer Funktionen. Dann gilt

$$\int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \, d\lambda \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\lambda. \quad (7.1)$$

**Bemerkung 7.1.1** Die Bedingung  $f_k \geq 0$  kann man nicht ohne Ersatz weglassen.

**Beweis.** In Theorem 5.13 haben wir gezeigt, dass auch  $f := \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$   $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar ist. Sei  $\varepsilon > 0$ . Wegen Lemma 6.14 kann man die Funktion  $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$  in dem Integral links in (7.1) von unten mit einfachen  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbaren Funktionen  $g$  approximieren in  $[0, \infty]$  und zwar derart, dass

$$\int_X g \, d\lambda \leq \int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \, d\lambda \leq \int_X g \, d\lambda + \varepsilon.$$

Wir erlauben hier den Fall  $\int_X g \, d\lambda = \infty$ .

Sei  $g$  eine solche einfache Funktion, das heißt

$$g = \sum_{i \in \mathbb{N}} g_i \mathbf{1}_{A_i},$$

mit  $g_i \in [0, \infty)$ ,  $A_i$  disjunkte  $\mathcal{L}$ -messbare Mengen in  $X$ , und

$$g \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k.$$

Wenn wir solch eine einfache Funktion noch etwas kleiner machen, dann finden wir, dass wir auch  $f_k$  für  $k$  groß von unten abschätzen können. Dazu nehmen wir ein positives  $t < 1$  und betrachten

$$B_{i,k} = \{x \in A_i; f_\ell(x) \geq t g_i \text{ für alle } \ell \geq k\}.$$

Man hat  $B_{i,0} \subset B_{i,k} \subset B_{i,k+1} \subset \dots \subset A_i$  und weil  $t < 1$ , folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(B_{i,k}) = \lambda(A_i)$ . So finden wir, dass

$$\int_X f_k \, d\lambda \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{B_{i,k}} f_k \, d\lambda \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} t g_i \lambda(B_{i,k})$$

<sup>1</sup>Pierre Joseph Louis Fatou, Frankreich 1878-1929

und auch

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\lambda &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} t g_i \lambda(B_{i,k}) \geq \\ &\geq \sum_{i \in \mathbb{N}} t g_i \liminf_{k \rightarrow \infty} \lambda(B_{i,k}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} t g_i \lambda(A_i) = t \int_X g \, d\lambda. \end{aligned}$$

Weil dies für beliebige  $t \in (0, 1)$  gilt, hat man

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\lambda \geq \int_X g \, d\lambda.$$

Das  $\varepsilon > 0$  war beliebig gewählt und daher folgt, dass

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\lambda \geq \sup_{\substack{g \leq f \\ g \text{ einf. } \mathcal{L}\text{-}\mathcal{A}_{\mathcal{T}}\text{-m.}}} \int_X g \, d\lambda = \int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \, d\lambda. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 7.2** Die Ungleichung im Lemma von Fatou ist eine echte Ungleichung, das heißt, im Allgemeinen kann man  $\leq$  nicht ersetzen durch  $=$ . Betrachte  $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_k(x) = k^2 x e^{-kx}$ . Man hat  $\lim_{k \rightarrow \infty} k^2 x e^{-kx} = 0$  für jedes  $x \in [0, 1]$  und es folgt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 k^2 x e^{-kx} \, dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k y e^{-y} \, dy = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - (k+1)e^{-k}) \rightarrow 1, \\ \int_0^1 \lim_{k \rightarrow \infty} k^2 x e^{-kx} \, dx &= \int_0^1 0 \, dx = 0. \end{aligned}$$

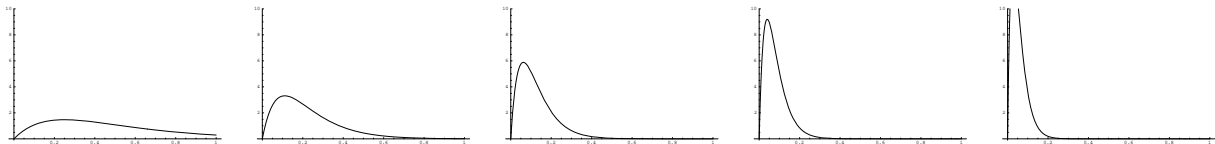


Abbildung 7.1: Einige Funktionen  $f_k$  aus dem Beispiel:  $k = 4, 9, 16, 25, 36$ .

## 7.2 Monoton oder majorisiert

Die Ungleichung in Fatous Lemma kann durch eine Gleichung ersetzt werden, wenn man weitere Bedingungen für die Funktionenfolge annimmt. Eine erste Möglichkeit betrifft Funktionenfolgen, die wachsend sind. Für solche monotonen Funktionenfolgen hat man das folgende ‘bessere’ Ergebnis.

**Theorem 7.3 (Monotone Konvergenz)** Sei  $X$   $\mathcal{L}$ -messbar und  $f_k : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  mit  $k \in \mathbb{N}$  eine monoton wachsende Folge  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbarer Funktionen:

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_k \leq f_{k+1} \leq \dots$$

Dann gilt

$$\int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \, d\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\lambda. \quad (7.2)$$

**Bemerkung 7.3.1** *So wie dieses Theorem formuliert ist, ist es nur auf nicht-negative Funktionen direkt anwendbar. Für solche Funktionenfolgen kann man in (7.2) ein Ergebnis in  $[0, \infty]$  erwarten. Für vorzeichenwechselnde Funktionen wäre es möglich, dass man das Theorem auf  $f_k^+$  und  $f_k^-$  anwenden kann und wenn man dabei nicht  $\infty - \infty$  erhält, hätte man auch da das Ergebnis in (7.2).*

**Beweis.** Weil  $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  für jedes  $x \in X$  und  $\{\int_X f_k d\lambda\}_{k \in \mathbb{N}}$  wachsende Folgen sind, konvergieren sie entweder zu einem Wert in  $\mathbb{R}$  oder streben nach  $\infty$ . Auf jeden Fall ist dann  $\liminf$  gleich  $\lim$ , möglicherweise als uneigentlicher Limes  $\infty$ . Wegen des Lemmas von Fatou gilt

$$\int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\lambda \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\lambda.$$

Für die andere Richtung verwendet man, dass  $f_\ell \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ . Es folgt, dass

$$\int_X f_\ell d\lambda \leq \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\lambda$$

also auch

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_X f_\ell d\lambda \leq \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\lambda. \quad \blacksquare$$

Eine zweite Möglichkeit ist die zusätzliche Bedingung, dass alle Funktionen durch eine feste Lebesgue-integrierbare Funktion majorisiert werden.

**Theorem 7.4 (Majorisierte Konvergenz)** *Sei  $X$   $\mathcal{L}$ -messbar und  $f_k : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $k \in \mathbb{N}$  eine Folge  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_T$ -messbarer Funktionen mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Es gibt eine Lebesgue-integrierbare Funktion  $g : X \rightarrow [0, \infty)$ , also  $\int_X g d\lambda < \infty$ , die die Funktionen  $|f_k|$  „majorisiert“:  $|f_k| \leq g$   $\lambda$ -fast-überall für alle  $k \in \mathbb{N}$ , und*
2.  *$f_k \rightarrow f$   $\lambda$ -fast-überall in  $X$  für  $k \rightarrow \infty$ .*

*Dann existiert  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\lambda$  in  $\mathbb{R}$  und es gilt, dass*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\lambda = \int_X f d\lambda. \quad (7.3)$$

**Bemerkung 7.4.1** *Auf Englisch heißt dieses Theorem: ‘the dominated convergence theorem’. Dieses Theorem ist anwendbar auf vorzeichenwechselnde Funktionen. Die Einschränkung durch eine Lebesgue-integrierbare Funktion  $g$  sorgt dafür, dass der Fall  $\infty - \infty$  nicht vorkommt.*

**Beweis.** Weil  $f_k \rightarrow f$   $\lambda$ -fast-überall, gilt auch  $|f - f_k| \rightarrow 0$   $\lambda$ -fast-überall. Weil  $|f_k| \leq g$   $\lambda$ -fast-überall und  $f_k \rightarrow f$   $\lambda$ -fast-überall gilt, folgt auch  $|f| \leq g$   $\lambda$ -fast-überall. Also folgt aus der Dreiecksungleichung, dass

$$|f_k - f| \leq |f_k| + |f| \leq 2g \text{ } \lambda\text{-fast-überall.}$$

Das heißt, dass  $2g - |f_k - f|$   $\lambda$ -fast-überall positiv ist, und dann folgt mit dem Lemma von Fatou, dass

$$\begin{aligned} 2 \int_X g d\lambda &= \int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} (2g - |f_k - f|) d\lambda \leq \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X (2g - |f_k - f|) d\lambda = 2 \int_X g d\lambda - \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| d\lambda. \end{aligned}$$

Das bedeutet

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| \, d\lambda = 0.$$

Dann ist der Limes Superior sogar ein Limes und weil

$$\left| \int_X (f_k - f) \, d\lambda \right| \leq \int_X |f_k - f| \, d\lambda$$

gilt, folgt (7.3). ■

Als eine Folge dieser Konvergenzsätze bekommt man das folgende Ergebnis.

**Korollar 7.5** Sei  $f, f_k \in \mathcal{L}^1(X)$  mit  $k \in \mathbb{N}$  derart, dass  $f_k \rightarrow f$  in  $\mathcal{L}^1(X)$ . Dann gibt es eine Teilfolge  $\{f_{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  derart, dass  $f_{k_i} \rightarrow f$   $\lambda$ -fast-überall.

**Beweis.** Weil  $\|f_k - f\|_{\mathcal{L}^1(X)} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  gibt es eine Teilfolge  $\{f_{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  mit

$$\|f_{k_i} - f\|_{\mathcal{L}^1(X)} \leq 2^{-i}.$$

Wir wenden Theorem 7.3 an auf  $g_\ell = \sum_{i=0}^{\ell} |f_{k_i} - f|$  und bekommen

$$\begin{aligned} \int_X \sum_{i \in \mathbb{N}} |f_{k_i} - f| \, d\lambda &= \int_X \lim_{\ell \rightarrow \infty} g_\ell \, d\lambda = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_X g_\ell \, d\lambda = \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_X \sum_{i=0}^{\ell} |f_{k_i} - f| \, d\lambda = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\ell} \int_X |f_{k_i} - f| \, d\lambda = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_X |f_{k_i} - f| \, d\lambda = \sum_{i \in \mathbb{N}} \|f_{k_i} - f\|_{\mathcal{L}^1(X)} \leq 2. \end{aligned}$$

Weil  $\int_X \sum_{i \in \mathbb{N}} |f_{k_i} - f| \, d\lambda < \infty$  folgt  $\sum_{i \in \mathbb{N}} |f_{k_i} - f| < \infty$   $\lambda$ -fast-überall. Weil in eine konvergente Folge die Termen nach 0 konvergieren, gilt auch:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |f_{k_i} - f| = 0 \text{ } \lambda\text{-fast-überall}$$

und es folgt  $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{k_i} = f$   $\lambda$ -fast-überall. ■

### 7.3 Vollständigkeit von $\mathcal{L}^1(X)$

Die Eigenschaften des Lebesgue-Integrals zeigen, dass  $\mathcal{L}^1(X)$  und auch  $L^1(X)$  eine Vektorraumstruktur haben. Definiert man für  $\mathbf{f} \in L^1(X)$

$$\|\mathbf{f}\|_{L^1(X)} = \int_X |f| \, d\lambda \tag{7.4}$$

mit  $f$  einen Vertreter von  $\mathbf{f}$ , dann ist dies eine Norm auf  $L^1(X)$ . Wir wiederholen die Bedingungen, die eine Norm erfüllen soll.

Die Funktion  $p : V \rightarrow [0, \infty)$  heißt eine **Seminorm** für den Vektorraum  $V$  (eigentlich  $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ ), falls die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1.  $p(c\mathbf{f}) = |c|p(\mathbf{f})$  für alle  $c \in \mathbb{R}$  und  $\mathbf{f} \in V$ ;

2.  $p(\mathbf{f} + \mathbf{g}) \leq p(\mathbf{f}) + p(\mathbf{g})$  für alle  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in V$ .

Man erinnere sich, dass  $p$  eine Norm ist, wenn außerdem die folgende Bedingung erfüllt ist:

3.  $p(\mathbf{f}) = 0$  für  $\mathbf{f} \in V$  genau dann, wenn  $\mathbf{f} = 0$ .

Ähnlich wie Cauchy-Folgen bezüglich einer Norm definiert werden, kann man Cauchy-Folgen auch bezüglich einer Seminorm definieren:

**Definition 7.6** Sei  $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$  ein Vektorraum und  $p$  eine Seminorm auf diesem Vektorraum. Eine Folge  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V$  heißt *Cauchy-Folge* bezüglich der Seminorm  $p$ , wenn folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : k, \ell \geq N_\varepsilon \implies p(f_k - f_\ell) < \varepsilon.$$

**Definition 7.7** Ein Vektorraum  $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$  heißt **vollständig bezüglich der Seminorm**  $p$ , wenn es für jede  $p$ -Cauchy-Folge  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V$  mindestens eine Funktion  $f \in V$  gibt so, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} p(f - f_k) = 0$ .

**Theorem 7.8**  $\mathcal{L}^1(X)$  ist vollständig bezüglich der Seminorm  $p$  definiert durch  $p(f) = \int_X |f| \, d\lambda$ .

**Bemerkung 7.8.1** Ein normierter Vektorraum  $(V, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|)$ , der vollständig ist bezüglich der Norm  $\|\cdot\|$ , heißt **Banachraum**. Wenn  $\mathcal{L}^1(X)$  vollständig ist bezüglich der Seminorm  $p$ , ist  $L^1(X)$  vollständig bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{L^1(X)}$ , anders gesagt:

$(L^1(X), +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_{L^1(X)})$  ist ein Banachraum.

Die Theorie der Banachräume ist das zentrale Thema der Funktionalanalysis. Banachräume spielen eine sehr wichtige Rolle in den Anwendungen. Wenn man nämlich imstande ist, die Lösung eines Problems zu approximieren, das heißt, eine Cauchy-Folge von approximativen Funktionen in einen passenden Banachraum zu finden, garantiert die Vollständigkeit, dass diese Folge eine Grenzfunktion im gleichen Vektorraum besitzt. Wenn man dann auch noch zeigen kann, dass die gewünschte Eigenschaft (der Lösungsbegriff) auf irgendeine Art stetig ist unter einen solchen Approximationsverfahren, ist die Grenzfunktion sogar eine Lösung.



Stefan Banach in 1919

**Bemerkung 7.8.2** Weil es kaum zu Irrtümern führt, schreiben wir ab hier auch  $\|f\|_{\mathcal{L}^1(X)}$  für  $f \in \mathcal{L}^1(X)$  obwohl es keine Norm, sondern nur eine Seminorm ist.

**Beweis.** Sei  $f_k \in \mathcal{L}^1(X)$  eine Cauchy-Folge bezüglich der Seminorm definiert in (7.4). Dann kann man eine streng wachsende Folge  $\{k_m\}$  finden derart, dass

$$\text{für } k, \ell \geq k_m \text{ gilt } \int_X |f_k - f_\ell| \, d\lambda < 2^{-m}. \quad (7.5)$$

Weil

$$\int_X \sum_{m=0}^{\ell} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}| d\lambda < \sum_{m=0}^{\ell} 2^{-m} \leq 2,$$

konvergiert die Reihe  $\sum_{m=0}^{\infty} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}|$   $\lambda$ -fast-überall. Also ist

$$g = \sum_{m=0}^{\infty} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}| \quad (7.6)$$

$\lambda$ -fast-überall wohldefiniert, sage überall auf  $A \subset X$  mit  $\lambda(X \setminus A) = 0$  und setze  $g = 0$  auf  $X \setminus A$ . Wegen Fatou gilt

$$\int_X g d\lambda = \int \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\ell} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}| d\lambda \leq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\ell} \int |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}| d\lambda \leq 2.$$

Wenn (7.6) auf  $A$  konvergiert, konvergiert auch  $\{f_{k_\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  auf  $A$ , denn

$$f_{k_\ell} = f_{k_0} + \sum_{m=1}^{\ell} (f_{k_m} - f_{k_{m-1}}).$$

Wir setzen

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{\ell \rightarrow \infty} f_{k_\ell} & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist wohldefiniert und weil die  $f_k$   $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar sind, ist auch  $f_\infty$   $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar.

Wegen majorisierter Konvergenz, denn  $|f_{k_m} - f| \leq g + |f_{k_0}|$  gilt auf  $A$ , also  $\lambda$ -fast-überall, und  $g + |f_{k_0}|$  ist Lebesgue-integrierbar, folgt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_X |f_{k_m} - f| d\lambda = \int_X \lim_{m \rightarrow \infty} |f_{k_m} - f| d\lambda = 0.$$

Auch gilt

$$\int_X |f_k - f| d\lambda = \int_X |f_k - f_{k_m}| d\lambda + \int_X |f_{k_m} - f| d\lambda.$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$ . Man nimmt  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  genügend groß, damit  $\int_X |f_k - f_\ell| d\lambda < \frac{1}{2}\varepsilon$  gilt für  $k, \ell > N_\varepsilon$  und anschließend  $M_\varepsilon \geq N_\varepsilon$  damit  $\int_X |f_{k_m} - f| d\lambda < \frac{1}{2}\varepsilon$  für  $m > M_\varepsilon$  gilt. Für  $k > N_\varepsilon$  folgt  $\int_X |f_k - f| d\lambda < \varepsilon$ . Das heißt,  $f_k \rightarrow f$  in  $\mathcal{L}^1(X)$ . ■

**Definition 7.9** Sei  $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$  ein Vektorraum mit (Semi)Norm  $\|\cdot\|$ . Eine Teilmenge  $V_0 \subset V$  heißt **dicht in**  $V$  bezüglich dieser (Semi)Norm, wenn es für jedes  $v \in V$  und  $\varepsilon > 0$  mindestens ein  $v_0 \in V_0$  gibt derart, dass  $\|v - v_0\| < \varepsilon$ .

**Bemerkung 7.9.1**  $\mathbb{Q}$  ist dicht in  $\mathbb{R}$  bezüglich  $|\cdot|$ .

**Bemerkung 7.9.2** Die einfachen Lebesgue-integrierbaren Funktionen liegen dicht in  $\mathcal{L}^1(X)$  bezüglich  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1(X)}$ . Für diese letzte Behauptung bemerke man, dass es für jede  $\varepsilon > 0$  und  $f \in \mathcal{L}^1(X)$  einfache Lebesgue-integrierbare Funktionen  $g$  und  $h$  gibt mit  $g \leq f \leq h$  und

$$\int_X g d\lambda \leq \int_X f d\lambda \leq \int_X h d\lambda < \int_X g d\lambda + \varepsilon.$$

Es folgt, dass

$$\|f - g\|_{\mathcal{L}^1(X)} = \int_X |f - g| d\lambda = \int_X (f - g) d\lambda = \int_X (f - h) d\lambda + \int_X (h - g) d\lambda < \varepsilon.$$

Übrigens gilt auch  $\|f - h\|_{\mathcal{L}^1(X)} < \varepsilon$ .



## 7.4 Der Vektorraum $\mathcal{L}^p(X)$

**Definition 7.10** Sei  $p \in (1, \infty)$ . Man definiert  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(X)}$  für  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_T$ -messbare Funktionen  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  wie folgt

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} = \left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Man sagt  $f \in \mathcal{L}^p(X)$ , wenn  $\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} < \infty$ .

**Bemerkung 7.10.1** Man sagt  $f \in \mathcal{L}_{\text{lok}}^p(X)$ , wenn für jede kompakte Teilmenge  $K \subset X$  gilt  $\|f\|_{\mathcal{L}^p(K)} < \infty$ .

**Bemerkung 7.10.2** Wenn  $f \in \mathcal{L}^p(X)$ , dann gilt  $|f|^p \in \mathcal{L}^1(X)$  und umgekehrt.

**Bemerkung 7.10.3** Weil für  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$  gilt

$$\begin{aligned} \int_X |\alpha f|^p d\lambda &\leq |\alpha|^p \int_X |f|^p d\lambda, \\ \int_X |f + g|^p d\lambda &\leq \int_X (|f| + |g|)^p d\lambda \leq 2^p \left( \int_X |f|^p d\lambda + \int_X |g|^p d\lambda \right), \end{aligned}$$

folgt  $\alpha f, f + g \in \mathcal{L}^p(X)$ . Das heißt,  $\mathcal{L}^p(X)$  ist ein Vektorraum.

## 7.5 Die Ungleichung von Hölder

Bevor wir zeigen können, dass  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(X)}$  eine Seminorm auf  $\mathcal{L}^p(X)$  ist, brauchen wir die folgende Ungleichung.

**Theorem 7.11 (Die Höldersche Ungleichung)** Sei  $f \in \mathcal{L}^p(X)$  und  $g \in \mathcal{L}^q(X)$  mit  $p, q > 1$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , dann gilt

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} \|g\|_{\mathcal{L}^q(X)}. \quad (7.7)$$

**Bemerkung 7.11.1** Wenn man die Seminormen in (7.7) explizit schreibt, hat man

$$\int_X |fg| d\lambda \leq \left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_X |g|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Der Beweis von Theorem 7.11 braucht mehrere Schritte. Diese Schritte werden wir als einzelne Lemmas aufführen.

**Lemma 7.12** Sei  $a, b > 0$  und  $p, q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

**Beweis.** Weil  $a > 0$ , darf man durch  $a^p$  dividieren und man sieht, weil  $p/q = p - 1$ , dass diese Ungleichung äquivalent ist zu

$$\frac{b}{a^{p/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \left( \frac{b}{a^{p/q}} \right)^q.$$

Setzt man  $x = ba^{-p/q}$ , dann reicht es, wenn wir für  $x > 0$  zeigen, dass

$$x \leq 1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{q}x^q. \quad (7.8)$$

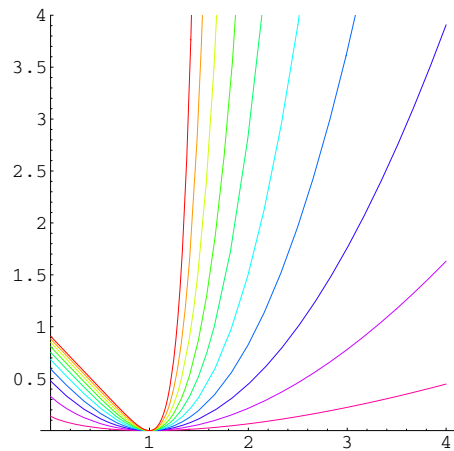
Betrachten wir  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \frac{1}{q}x^q - \frac{1}{q} + 1 - x.$$

Hier rechts steht ein Bild zu  $f$  bei verschiedenen  $q$ . Es gilt  $f(1) = 0$  und  $f'(x) = x^{q-1} - 1$ . Weil  $f'(x) < 0$  für  $x \in (0, 1)$  und  $f'(x) > 0$  für  $x \in (1, \infty)$ , hat  $f$  ein Minimum in 1 und es gilt

$$f(x) \geq f(1) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^+.$$

Dann ist (7.8) bewiesen und auch das Lemma. ■



**Lemma 7.13** Sei  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  für  $i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$  und  $p, q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt

$$\sum_{i=0}^m |a_i b_i| \leq \left( \sum_{i=0}^m |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=0}^m |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Beweis.** Wir setzen  $A = \left( \sum_{i=0}^m |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$  und  $B = \left( \sum_{i=0}^m |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$  und dürfen annehmen, dass  $A \neq 0$  und  $B \neq 0$ . Wenn nämlich  $A = 0$  oder  $B = 0$ , stünde links und rechts zweimal 0. Aus Lemma 7.12 folgt

$$\frac{|a_i|}{A} \frac{|b_i|}{B} \leq \frac{1}{p} \left( \frac{|a_i|}{A} \right)^p + \frac{1}{q} \left( \frac{|b_i|}{B} \right)^q = \frac{1}{p} \frac{|a_i|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{|b_i|^q}{B^q}.$$

Summiert man für  $i$  von 0 bis  $m$ , bekommt man

$$\sum_{i=0}^m \frac{|a_i b_i|}{AB} \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=0}^m |a_i|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=0}^m |b_i|^q}{B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Multiplizieren mit  $AB$  liefert das Ergebnis. ■

**Beweis von Satz 7.11.** Seien  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  und  $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  Folgen von reellen Zahlen, sodass  $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^p$  und  $\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|^q$  beide konvergieren. Dann konvergiert wegen Lemma 7.13 auch  $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i b_i|$  und es gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a_i b_i| \leq \left( \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=0}^{\infty} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Sei  $f \in \mathcal{L}^p(X)$  und  $g \in \mathcal{L}^q(X)$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann folgt  $|f|^p, |g|^q \in \mathcal{L}^1(X)$  und es gibt einfache Lebesgue-integrierbare Funktionen  $f_u \leq |f|^p \leq f_o$  und  $g_u \leq |g|^q \leq g_o$  mit

$$\begin{aligned} \int_X f_u \, d\lambda &\leq \int_X |f|^p \, d\lambda \leq \int_X f_o \, d\lambda < \int_X f_u \, d\lambda + \varepsilon \text{ und} \\ \int_X g_u \, d\lambda &\leq \int_X |g|^q \, d\lambda \leq \int_X g_o \, d\lambda < \int_X g_u \, d\lambda + \varepsilon. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$f_u^{1/p} g_u^{1/q} \leq |fg| \leq f_o^{1/p} g_o^{1/q}.$$

Durch eventuelle Verfeinerung darf man annehmen, dass es Lebesgue-messbare Mengen  $A_i$  und  $c_i, d_i \in [0, \infty)$  gibt, sodass

$$f_o = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i \mathbf{1}_{A_i} \quad \text{und} \quad g_o = \sum_{i \in \mathbb{N}} d_i \mathbf{1}_{A_i}.$$

Setzen wir  $a_i = (c_i \lambda(A_i))^{1/p}$  und  $b_i = (d_i \lambda(A_i))^{1/q}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \int_X f_o \, d\lambda &= \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i \lambda(A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^p, \\ \int_X g_o \, d\lambda &= \sum_{i \in \mathbb{N}} d_i \lambda(A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} |b_i|^q \quad \text{und} \\ \int_X f_o^{1/p} g_o^{1/q} \, d\lambda &= \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i^{1/p} d_i^{1/q} \lambda(A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i b_i|. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int |fg| \, d\lambda &\leq \int_X f_o^{1/p} g_o^{1/q} \, d\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i b_i| \leq \left( \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=0}^{\infty} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left( \int_X f_o \, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_X g_o \, d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left( \int_X |f|^p \, d\lambda + \varepsilon \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_X |g|^q \, d\lambda + \varepsilon \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Weil wir  $\varepsilon > 0$  beliebig wählen können, folgt das Ergebnis. ■



# Analysis 3, Woche 8

## Die Lebesgue-Räume



### 8.1 Der Lebesgue-Raum $\mathcal{L}^p(X)$

Für eine Lebesgue-messbare Menge  $X \subset \mathbb{R}^n$  und  $p \in (1, \infty)$  wird  $\mathcal{L}^p(X)$  definiert als die Menge aller  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_T$ -messbaren Funktionen  $f : X \subset \mathbb{R}^n$ , für die gilt

$$\int_X |f|^p d\lambda < \infty.$$

In Bemerkung 7.10.3 haben wir gezeigt, dass  $\mathcal{L}^p(X)$  mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation ein Vektorraum ist. Wir wollen noch zeigen, dass  $\|\cdot\|$ , definiert durch  $\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} = \left(\int_X |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$  eine Seminorm ist. Die erste Bedingung ist sofort erfüllt:

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_{\mathcal{L}^p(X)} &= \left(\int_X |\alpha f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\int_X |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= |\alpha| \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} \text{ für } \alpha \in \mathbb{R} \text{ und } f \in \mathcal{L}^p(X). \end{aligned}$$

Die zweite Bedingung liefert uns die Ungleichung von Minkowski.

**Theorem 8.1 (Die Ungleichung von Minkowski)** Sei  $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$  mit  $p > 1$ , dann gilt

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(X)}. \quad (8.1)$$

**Beweis.** In Bemerkung 7.10.3 haben wir gezeigt, dass  $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$  impliziert, dass  $f + g \in \mathcal{L}^p(X)$ . Wir dürfen also annehmen, dass  $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)} < \infty$ . Wenn  $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)} = 0$ , ist nichts zu beweisen, denn die rechte Seite in (8.1) ist nichtnegativ. Also nehmen wir an, dass  $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)} \in \mathbb{R}^+$ . Setzen  $q = \frac{p}{p-1}$ , so gilt  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Wir verwenden die Höldersche Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)}^p &= \int_X |f + g|^p d\lambda \leq \int_X |f| |f + g|^{p-1} d\lambda + \int_X |g| |f + g|^{p-1} d\lambda \leq \\ &\leq \left( \left(\int_X |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\lambda\right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left(\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(X)}\right) \|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)}^{p-1}. \end{aligned}$$

Weil  $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)} \in \mathbb{R}^+$  gilt, kann man dividieren durch  $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)}^{p-1}$  und es folgt die Ungleichung in (8.1). ■

**Beispiel 8.2** Die Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = (1 + \|x\|^2)^{-\alpha/2}$  ist genau dann in  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ , falls  $\alpha p > n$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wenn man  $r_k = k\varepsilon$  setzt und  $\mathbb{R}^n$  radialsymmetrisch zerlegt durch

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \text{ mit } A_k := \{x \in \mathbb{R}^n; r_k \leq \|x\| \leq r_{k+1}\},$$

findet man für  $\alpha \geq 0$ , weil  $r \mapsto (1 + r^2)^{-\alpha/2}$  fallend ist auf  $[0, \infty)$ , dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p d\lambda = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{A_k} |f|^p d\lambda \begin{cases} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f(r_k)|^p \lambda(A_k), \\ \geq \sum_{k=0}^{\infty} |f(r_{k+1})|^p \lambda(A_k). \end{cases}$$

Wegen des Mittelwertsatzes gilt

$$\frac{(r_{k+1})^n - (r_k)^n}{r_{k+1} - r_k} = n(r_k + \mathcal{O}(\varepsilon))^{n-1}$$

und

$$\lambda(A_k) = \sigma_n((r_{k+1})^n - (r_k)^n) = n\sigma_n(r_k + \mathcal{O}(\varepsilon))^{n-1}(r_{k+1} - r_k)$$

wobei  $\sigma_n$  das Volumen der Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$  ist. Wenn man  $\varepsilon \downarrow 0$  nimmt, folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p d\lambda = \int_0^{\infty} |f(r)|^p n\sigma_n r^{n-1} dr = n\sigma_n \int_{r=0}^{\infty} (1 + r^2)^{-\alpha p/2} r^{n-1} dr.$$

Dieses Integral ist kleiner  $\infty$  genau dann, wenn  $-\alpha p + n - 1 < -1$ .

**Beispiel 8.3** Wenn man nicht am genauen Wert des Integrals interessiert ist, sondern nur an 'beschränkt' ( $< \infty$ ) oder 'unbeschränkt' ( $= \infty$ ), dann kann man oft auch eine gröbere einseitige Abschätzung zeigen. Zum Beispiel gilt für  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = (1 + |x|)^{-4}$ , dass  $f \in \mathcal{L}^2(X)$ . Wir können  $|f|^2$  abschätzen durch die einfache Funktion  $g = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{-8} \mathbf{1}_{B_{n+1}(0) \setminus B_n(0)}$  und es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |f|^2 d\lambda &\leq \int \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{-8} \mathbf{1}_{B_{n+1}(0) \setminus B_n(0)} d\lambda = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{-8} \lambda(B_{n+1}(0) \setminus B_n(0)) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{-8} \sigma_3((n+1)^3 - n^3) = \\ &= \sigma_3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{(n+1)^8} \leq 3\sigma_3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^6} < \infty. \end{aligned}$$

**Theorem 8.4**  $\mathcal{L}^p(X)$  ist ein vollständiger Vektorraum bezüglich der  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ -Seminorm.

**Beweis.** Sei  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p(X)$  eine Cauchy-Folge bezüglich der  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ -Seminorm. Wie im Beweis der Vollständigkeit von  $\mathcal{L}^1(X)$  nimmt man  $k_m$  derart, dass

$$\|f_k - f_\ell\|_{\mathcal{L}^p(X)} \leq 2^{-m} \text{ für } k, \ell > k_m.$$

Dann ist  $g := \sum_{m=0}^{\infty} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}|$   $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar und weil man

$$\left\| \sum_{m=0}^{\ell} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}| \right\|_{\mathcal{L}^p(X)} \leq \sum_{m=0}^{\ell} \|f_{k_{m+1}} - f_{k_m}\|_{\mathcal{L}^p(X)} \leq 2$$

hat, gilt wegen Fatou, dass

$$\|g\|_{\mathcal{L}^p(X)} = \left\| \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\ell} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}| \right\|_{\mathcal{L}^p(X)} \leq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left\| \sum_{m=0}^{\ell} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}| \right\|_{\mathcal{L}^p(X)} \leq 2.$$

Außerdem konvergiert  $\left\{ \sum_{m=0}^{\ell} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}| \right\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  absolut  $\lambda$ -fast-überall, sagen wir auf  $A$ , und ist auf die gleiche Menge  $A$  auch  $f_{\infty} = f_{k_0} + \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\ell} (f_{k_{m+1}} - f_{k_m})$  wohldefiniert. Auf die Nullmenge  $X \setminus A$  setzt man  $f_{\infty}(x) = 0$ . Mit Hilfe der majorierten Konvergenz folgt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_{\infty} - f_{k_m}\|_{\mathcal{L}^p(X)} = \left\| \lim_{m \rightarrow \infty} (f_{\infty} - f_{k_m}) \right\|_{\mathcal{L}^p(X)} = 0$$

und schlussendlich

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_{\infty} - f_m\|_{\mathcal{L}^p(X)} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \|f_{\infty} - f_{k_m}\|_{\mathcal{L}^p(X)} + \|f_{k_m} - f_m\|_{\mathcal{L}^p(X)} \right) = 0.$$

■

## 8.2 Der Lebesgue-Raum $\mathcal{L}^\infty(X)$

**Definition 8.5** Sei  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbare Funktion. Man definiert für  $\mathcal{L}$ -messbare  $A \subset X$  das  $\lambda$ -wesentliche Supremum<sup>1</sup> auf  $A$  durch

$$\text{ess-sup}_A f = \inf \{ t \in \mathbb{R}; \lambda(\{x \in A; f(x) > t\}) = 0 \}.$$

Ähnlich kann man auch das  $\lambda$ -wesentliche Infimum auf  $A$  definieren.

**Bemerkung 8.5.1** Für das  $\lambda$ -wesentliche Supremum gilt:

$$\text{ess-sup}_A f = \inf_{\substack{N \subset A \\ \lambda(N)=0}} \left( \sup_{A \setminus N} f \right).$$

Es folgt, dass  $\text{ess-sup}_A f \leq \sup_A f$ .

**Definition 8.6** Man definiert  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$  für  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbare Funktionen  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  wie folgt

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} = \text{ess-sup}_X |f|.$$

Man sagt  $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ , wenn  $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} < \infty$ .

**Beispiel 8.7** Für die Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} \text{ falls } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \\ 0 \text{ falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ oder } x = 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} x^{-1} \text{ falls } x \neq 0, \\ 0 \text{ falls } x = 0, \end{cases}$$

gilt

$$\text{ess-sup}_{\mathbb{R}} f = 0 \quad \text{und} \quad \text{ess-sup}_{\mathbb{R}} g = \infty.$$

<sup>1</sup>Auf Englisch: *essential supremum*.

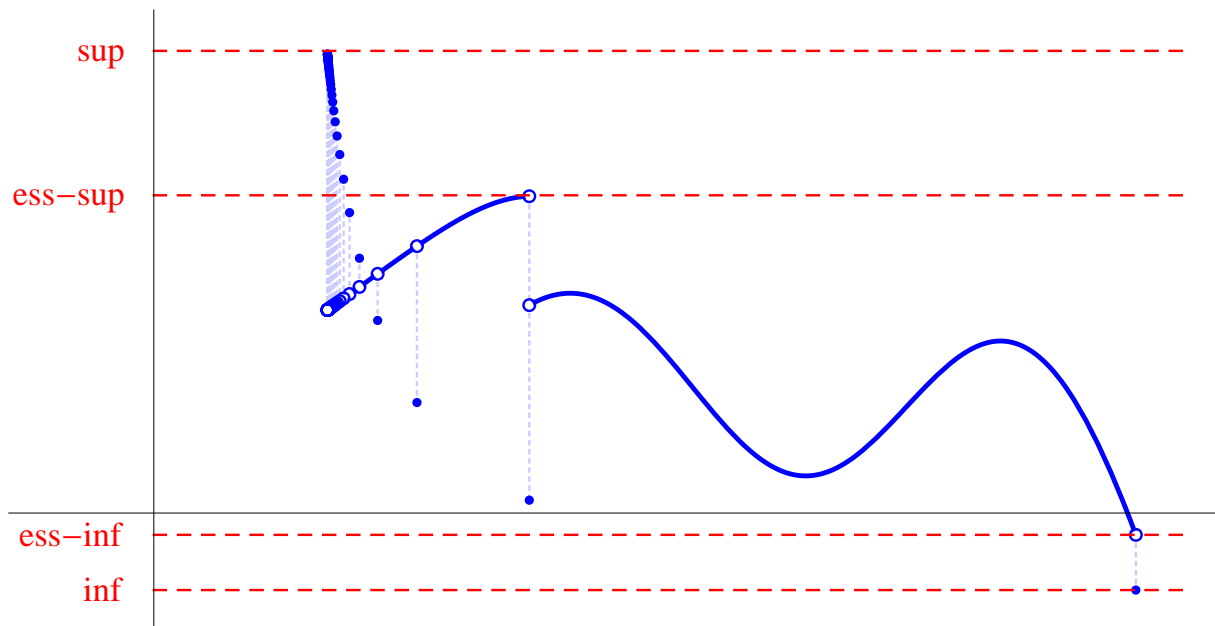


Abbildung 8.1: Das Supremum und das wesentliche Supremum können verschieden sein.

**Lemma 8.8** Für  $f \in \mathcal{L}^1(X)$  und  $g \in \mathcal{L}^\infty(X)$  gilt

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1(X)} \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}. \quad (8.2)$$

Für  $f, g \in \mathcal{L}^\infty(X)$  gilt

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}. \quad (8.3)$$

**Beweis.** Sei  $\varepsilon > 0$  und  $M_{g,\varepsilon} = \text{ess-sup}_X |g| + \varepsilon$ . Setze  $B_{g,\varepsilon} = \{x \in X; |g(x)| > M_{g,\varepsilon}\}$ . Dann gilt  $\lambda(B) = 0$  und

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(X)} = \int_X |fg| d\lambda = \int_{X \setminus B_{g,\varepsilon}} |fg| d\lambda \leq M_{g,\varepsilon} \int_{X \setminus B_{g,\varepsilon}} |f| d\lambda = \|f\|_{\mathcal{L}^1(X)} (\|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + \varepsilon).$$

Weil diese Ungleichung für alle  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt (8.2).

Bei der zweiten Ungleichung soll man bemerken, dass für  $x \in X \setminus (B_{f,\varepsilon} \cup B_{g,\varepsilon})$  gilt, dass

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_{f,\varepsilon} + M_{g,\varepsilon} = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + 2\varepsilon.$$

Weil  $\lambda(B_{f,\varepsilon} \cup B_{g,\varepsilon}) \leq \lambda(B_{f,\varepsilon}) + \lambda(B_{g,\varepsilon}) = 0$  hat man

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + 2\varepsilon.$$

Weil diese Ungleichung für alle  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt (8.3). ■

Die Ungleichung in (8.3) zeigt die zweite Bedingung einer Seminorm. Die erste ist sofort erfüllt und man bekommt:

**Lemma 8.9**  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$  ist eine Seminorm auf  $\mathcal{L}^\infty(X)$ .

Auch hier kann man den Vektorraum  $L^\infty(X) = \mathcal{L}^\infty(X) / \sim$  definieren. Definiert man die Norm  $\|\cdot\|_{L^\infty(X)}$  wie folgt:

$$\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(X)} := \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} \text{ für } f \in \mathcal{L}^\infty(X) \text{ einen Vertreter von } \mathbf{f} \in L^\infty(X),$$

dann ist  $(L^\infty(X), \|\cdot\|_{L^\infty(X)})$  nicht nur ein normierter Vektorraum sondern sogar ein Banachraum.



### 8.3 Der Lebesgue-Raum $\mathcal{L}^2(X)$

Wir wiederholen die Eigenschaften eines inneren Produktes.

Sei  $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$  ein Vektorraum und  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1.  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$  für alle  $v, w \in V$ ;
2.  $\langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$  und  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$  für alle  $u, v, w \in V$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
3.  $\langle v, v \rangle \geq 0$  für alle  $v \in V$  und  $\langle v, v \rangle = 0$  genau dann, wenn  $v = 0$ .

Aus 1 und 2 folgt, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  **bilinear**<sup>2</sup> ist.

Wenn  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  ein inneres Produkt ist, dann ist  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad (8.4)$$

eine Norm.

**Definition 8.10** Wenn der Vektorraum  $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$  ein inneres Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  hat und vollständig ist bezüglich der vom inneren Produkt definierten Norm, nennt man ihn **Hilbertraum**.

**Lemma 8.11** Für  $(\mathcal{L}^2(X), +, \mathbb{R}, \cdot)$  erfüllt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , definiert durch

$$\langle u, v \rangle = \int_X uv \, d\lambda \quad (8.5)$$

die ersten beiden Bedingungen eines inneren Produktes. Außerdem gilt  $\langle v, v \rangle \geq 0$  für alle  $v \in V$ .

**Bemerkung 8.11.1** Weil  $(L^2(X), +, \mathbb{R}, \cdot)$  vollständig ist bezüglich  $\|\cdot\|_{L^2(X)}$  und man durch (8.4-8.5) ein zugehörendes inneres Produkt hat, und die letzte Eigenschaft nun auch erfüllt ist, ist  $(L^2(X), +, \mathbb{R}, \cdot)$  ein Hilbertraum.

**Beweis.** Die Bedingungen für ein inneres Produkt folgen aus den Eigenschaften des Lebesgue-Integrals. ■

### 8.4 Stetige lineare Abbildungen

**Definition 8.12** Seien  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, \|\cdot\|_W)$  normierte Vektorräume. Man schreibt

$$L((V, \|\cdot\|_V); (W, \|\cdot\|_W))$$

für die Menge aller stetigen linearen Abbildungen  $T : (V, \|\cdot\|_V) \rightarrow (W, \|\cdot\|_W)$ .

Wir wiederholen nochmals, dass eine Abbildung  $T$  linear ist, wenn

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g) \text{ für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ und } f, g \in V$$

und dass  $T$  stetig ist, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \|f - g\| < \delta_\varepsilon \implies \|T(f) - T(g)\| < \varepsilon.$$

<sup>2</sup>Das Funktional  $F : U \times V \rightarrow W$  heißt bilinear, wenn  $u \mapsto F(u, v)$  linear ist für alle  $v \in V$  und  $v \mapsto F(u, v)$  linear ist für alle  $u \in U$ .

**Lemma 8.13** Seien  $(V, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_W)$  zwei normierte Vektorräume und sei  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

1.  $T$  ist stetig in 0;
2.  $T$  ist stetig auf  $V$ ;
3.  $T$  ist beschränkt als lineares Funktional<sup>3</sup>:  
es gibt  $M_T \in [0, \infty)$  mit  $\|T(v)\|_W \leq M_T \|v\|_V$  für alle  $v \in V$ ;
4.  $\sup \left\{ \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \setminus \{0\} \right\} < \infty$ ;
5.  $\sup \{ \|T(v)\|_W; \|v\|_V = 1 \} < \infty$ .

**Beweis.** (1.  $\Rightarrow$  2.) Für  $\varepsilon > 0$  sei  $\delta > 0$  derart, dass aus der Ungleichung  $\|v - 0\|_V < \delta$  folgt, dass  $\|T(v) - T(0)\|_W < \varepsilon$ . Dann gilt für  $\|v_1 - v_2\|_V < \delta$ , dass

$$\|T(v_1) - T(v_2)\|_W = \|T(v_1 - v_2)\|_W < \varepsilon.$$

(2.  $\Rightarrow$  3.) Es gibt  $\delta > 0$  derart, dass für  $\|v\|_V < \delta$  gilt  $\|T(v)\|_W < 1$ . Setze  $M_T = \delta^{-1}$  und es folgt für  $\|v\|_V \neq 0$

$$\|T(v)\|_W = \left\| \delta^{-1} \|v\|_V T\left(\frac{v}{\|v\|_V} \delta\right) \right\|_W = \delta^{-1} \|v\|_V \left\| T\left(\frac{v}{\|v\|_V} \delta\right) \right\|_W \leq \delta^{-1} \|v\|_V.$$

Für  $\|v\|_V = 0$  gilt  $T(v) = 0$  und die Ungleichung ist auch erfüllt.

(3.  $\Rightarrow$  4.) Weil  $\|T(v)\|_W \leq M_T \|v\|_V$  gilt, folgt  $\sup \left\{ \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \setminus \{0\} \right\} \leq M_T$ .

(4.  $\Rightarrow$  5.) Das Ergebnis folgt aus

$$\frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} = \left\| T\left(\frac{v}{\|v\|_V}\right) \right\|_W.$$

(5.  $\Rightarrow$  1.) Setze  $M = \sup \{ \|T(v)\|_W; \|v\|_V = 1 \}$ . Man sieht fast sofort, dass man für  $\varepsilon > 0$  die folgende  $\delta$  nehmen kann:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M + 1}.$$

Denn für  $\|v\|_V < \delta$  (und  $\|v\|_V \neq 0$ ) gilt

$$\|T(v)\|_W = \|v\|_V \left\| T\left(\frac{v}{\|v\|_V}\right) \right\|_W \leq \|v\|_V M \leq \frac{\varepsilon}{M + 1} M < \varepsilon.$$

Der Kreis ist geschlossen. ■

Lemma 8.13 sagt aus, dass „stetig und linear“ gleich „beschränkt linear“. Die kleinste obere Schranke  $M_T$ , für die gilt, dass

$$\|T(v)\|_W \leq M_T \|v\|_W \quad \text{für alle } v \in V, \quad (8.6)$$

kann man als Norm für  $T$  verwenden.

<sup>3</sup>Man nennt eine Funktion  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt, wenn es  $M \in \mathbb{R}^+$  gibt mit  $|f(v)| \leq M$  für alle  $v \in V$ .

Man nennt ein lineares Funktional  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt, mit  $(V, \|\cdot\|_V)$  einem Vektorraum, wenn es  $M \in \mathbb{R}^+$  gibt mit  $|f(v)| \leq M \|v\|_V$  für alle  $v \in V$ .

**Lemma 8.14** Seien  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, \|\cdot\|_W)$  zwei normierte Vektorräume. Dann wird

$$(L((V, \|\cdot\|_V); (W, \|\cdot\|_W)), \|\cdot\|)$$

mit

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \setminus \{0\} \right\} \quad (8.7)$$

ein normierter Vektorraum.

**Beweis.** Für jedes  $T \in L((V, \|\cdot\|_V); (W, \|\cdot\|_W))$  gibt es ein  $M_T \in \mathbb{R}^+$  derart, dass (8.6) erfüllt ist. Dann ist das Supremum in (8.7) wohldefiniert. Man zeigt sofort, dass  $\|\cdot\|$  die Eigenschaften einer Norm erfüllt:

1.  $\|cT\| = \sup \left\{ \frac{\|cT(v)\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \setminus \{0\} \right\} = \sup \left\{ \frac{|c|\|T(v)\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \setminus \{0\} \right\} = |c| \|T\|;$
2. Aus der Dreiecksungleichung für  $\|\cdot\|_W$  und einer Eigenschaft des Supremums folgt:

$$\begin{aligned} \|T_1 + T_2\| &= \sup \left\{ \frac{\|T_1(v) + T_2(v)\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \setminus \{0\} \right\} \leq \\ &\leq \sup \left\{ \frac{\|T_1(v)\|_W + \|T_2(v)\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \setminus \{0\} \right\} \leq \\ &\leq \sup \left\{ \frac{\|T_1(v)\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \setminus \{0\} \right\} + \sup \left\{ \frac{\|T_2(v)\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \setminus \{0\} \right\} = \|T_1\| + \|T_2\|. \end{aligned}$$

3. Und  $\|T\| = 0$  impliziert, dass  $\|T(v)\|_W = 0$  für alle  $v$  und dann auch, dass  $Tv = 0$  für alle  $v$ . Das heißt,  $T$  ist das 0-Funktional. ■

**Beispiel 8.15** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt mit  $0 \in K$ . Für  $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$  mit

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)|; x \in K\},$$

ist das Funktional  $T : C(K) \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$Tf = f(0),$$

eine stetige lineare Abbildung:

- linear:  $T(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(0) = \alpha f(0) + \beta g(0) = \alpha T(f) + \beta T(g)$ .
- stetig:  $|T(f)| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty$ .

**Beispiel 8.16** Obwohl  $(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})})$  kein normierter Vektorraum ist, denn  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})}$  ist ja nur eine Seminorm auf dem Vektorraum  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , kann man schauen, ob  $T : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$Tf = f(0),$$

beschränkt ist bezüglich der Seminorm. Das ist nicht so. Man betrachte  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  und  $g = f + \mathbf{1}_{\{0\}}$ . Dann gilt  $|T(f) - T(g)| = 1$  und  $\|f - g\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})} = 0$ .

Ein Funktional wie  $T$  kann man nicht auf  $L^1(\mathbb{R})$  vernünftig definieren. Die Funktionen  $f$  und  $g$  vertreten das gleiche Element in  $L^1(\mathbb{R})$  und  $Tf \neq Tg$ .

**Beispiel 8.17** Das Funktional  $T : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$Tf = \int_{\mathbb{R}} f \mathbf{1}_{[0,1]} d\lambda,$$

ist auch  $L^1(\mathbb{R})$  zu definieren, denn wenn  $f = g$   $\lambda$ -f.ü. gilt, folgt  $Tf = Tg$ . Nennen wir  $\mathbf{T}$  das zugehörige Funktional auf  $L^1(\mathbb{R})$ , dann gilt

$$|\mathbf{T}(f)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f \mathbf{1}_{[0,1]} d\lambda \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f| \mathbf{1}_{[0,1]} d\lambda = \int_{[0,1]} |f| d\lambda \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

und wir sehen, dass  $\mathbf{T}$  beschränkt und deshalb auch stetig ist.

**Beispiel 8.18** Betrachten wir die stetigen Funktionen auf  $[0, 1]$  mit  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1([0,1])}$  als Norm.  $(C[0, 1], \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1([0,1])})$  ist ein normierter Vektorraum. Weil  $C[0, 1] \subset \mathcal{L}^1([0, 1])$  gilt, reicht es wenn wir zeigen können, dass  $\|f\|_{\mathcal{L}^1([0,1])} = 0$  impliziert  $f = 0$ . Für stetige Funktionen gilt dies.

Bei dieser Norm ist die Abbildung  $T : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$Tf = f(0)$$

immer noch linear, aber keine stetige Abbildung.

## 8.5 Der Darstellungssatz von Riesz

Für einen normierten Vektorraum  $(V, \|\cdot\|_V)$  definiert man den Dualraum  $V'$  als die Menge aller stetigen linearen Abbildungen  $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ , oder anders gesagt:

$$V' = L((V, \|\cdot\|_V); (\mathbb{R}, |\cdot|)). \quad (8.8)$$

**Korollar 8.19** Sei  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein normierter Vektorraum. Dann ist  $\|\cdot\|_{V'}$ , definiert durch

$$\|T\|_{V'} = \sup \{|T(v)|; \|v\|_V = 1\} \quad (8.9)$$

eine Norm auf  $V'$ .

**Beweis.** Dieses Ergebnis folgt wegen (8.8) aus den letzten Lemmas. ■

**Theorem 8.20 (Der Darstellungssatz von Frigyes Riesz)** Sei  $p \in [1, \infty)$  und  $X \subset \mathbb{R}^n$  Lebesgue-messbar. Sei  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  falls  $p \in (1, \infty)$  und  $q = \infty$  falls  $p = 1$ . Dann gilt folgendes:

1. Für jede  $g \in L^q(X)$  gehört  $T_g : L^p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$T_g(f) = \int_X gf d\lambda \quad (8.10)$$

zu  $(L^p(X))'$ .

2. Für jede  $T \in (L^p(X))'$  gibt es  $g \in L^q(X)$  mit  $T(f) = \int_X gf d\lambda$ .

**Beweis.** Die erste Aussage ist ein direktes Korollar der Hölder-Ungleichung und Lemma 8.13. Einen Beweis der zweiten Aussage wird es möglicherweise bei der Funktionalanalysis geben. Man kann sich auch Paragraphen 36 von "Functional Analysis" durch Frigyes Riesz und Béla Sz.-Nagy anschauen. ■

Dieser Satz besagt, dass für  $p \in [1, \infty)$  und  $q$  wie oben gilt

$$\left( (L^p(X))', \|\cdot\|_{(L^p(X))'} \right) \simeq \left( L^q(X), \|\cdot\|_{L^q(X)} \right).$$

Das Symbol  $\simeq$  bezeichnet 'ist isomorph zu'. **Isomorph** für normierte Vektorräume bedeutet, dass es eine bijektive Abbildung gibt, die die Vektorraumstruktur erhält und die Normen vergleichen lässt.

- Die bijektive Abbildung ist hier  $g \mapsto T_g : L^q(X) \rightarrow (L^p(X))'$  mit  $T_g$  definiert in (8.10).
- Die Vektorraumstruktur bleibt erhalten, weil

$$T_{\alpha f + \beta g} = \alpha T_f + \beta T_g \text{ für alle } f, g \in L^q(X) \text{ und } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- Die Normen lassen sich vergleichen, weil es  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$  gibt derart, dass

$$c_1 \|f\|_{L^q(X)} \leq \|T_f\|_{(L^p(X))'} \leq c_2 \|f\|_{L^q(X)} \text{ für alle } f \in L^q(X).$$

Man findet sogar folgendes:

**Lemma 8.21** Für alle  $g \in L^q(X)$  gilt

$$\|T_g\|_{(L^p(X))'} = \|g\|_{L^q(X)} \quad (8.11)$$

**Bemerkung 8.21.1** Wenn für eine Isomorphie  $\mathcal{I} : (V, \|\cdot\|_V) \rightarrow (W, \|\cdot\|_W)$  gilt, dass

$$\|\mathcal{I}(f)\|_W = \|f\|_V,$$

dann nennt man  $\mathcal{I}$  eine **isometrische Isomorphie**.

**Beweis.** Für  $p \in (1, \infty)$  zeigt man  $\leq$  in (8.11) wie folgt:

$$\begin{aligned} \|T_g\|_{(L^p(X))'} &= \sup \left\{ |T_g(v)|; \|v\|_{L^p(X)} = 1 \right\} = \\ &= \sup \left\{ \left| \int gv \, d\lambda \right|; \|v\|_{L^p(X)} = 1 \right\} \leq \\ &\leq \sup \left\{ \int |gv| \, d\lambda; \|v\|_{L^p(X)} = 1 \right\} \leq \\ &\leq \sup \left\{ \|g\|_{L^q(X)} \|v\|_{L^p(X)}; \|v\|_{L^p(X)} = 1 \right\} = \|g\|_{L^q(X)}. \end{aligned}$$

Um  $\geq$  in (8.11) zu zeigen, betrachtet man

$$v_g = |g|^{q/p} \text{sign}(g).$$

Es gilt  $v_g \in L^p(X)$  und

$$\|v_g\|_{L^p(X)} = \|g\|_{L^q(X)}^{q/p}.$$

Angenommen  $\|g\|_{L^q(X)} \neq 0$ , so betrachtet man

$$\tilde{v}_g = \frac{v_g}{\|v_g\|_{L^p(X)}}.$$

Man findet  $\|\tilde{v}_g\|_{L^p(X)} = 1$  und es folgt, weil  $1 + q/p = q$  und  $q - q/p = 1$ , dass

$$\begin{aligned} \|T_g\|_{(L^p(X))'} &= \sup \left\{ |T_g(v)| ; \|v\|_{L^p(X)} = 1 \right\} \geq \\ &\geq |T_g(\tilde{v}_g)| = \left| \int g \tilde{v}_g \, d\lambda \right| = \frac{1}{\|v_g\|_{L^p(X)}} \left| \int g v_g \, d\lambda \right| = \\ &= \frac{1}{\|v_g\|_{L^p(X)}} \left| \int g |g|^{q/p} \operatorname{sign}(g) \, d\lambda \right| = \frac{1}{\|g\|_{L^q(X)}^{q/p}} \int |g| |g|^{q/p} \, d\lambda = \\ &= \frac{1}{\|g\|_{L^q(X)}^{q/p}} \|g\|_{L^q(X)}^q = \|g\|_{L^q(X)}. \end{aligned}$$

Im Fall  $g = 0$  folgt das Ergebnis sofort.

Man soll sich überlegen, was sich ändert falls  $p = 1$  und  $q = \infty$ . ■

Haben Sie übrigens bemerkt, dass wir im Beweis des letzten Lemmas mit Lebesgue-Klassen gerechnet haben als wären es Funktionen?

# Analysis 3, Woche 9

## Berechnen der Integrale



### 9.1 Einleitung

Um ein Integral explizit berechnen zu können, greift man fast immer auf ein Ergebnis zurück: den Hauptsatz der Integralrechnung. Er stellt die Verbindung her zwischen Integration und Stammfunktion. Wenn  $F' = f$  auf  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , dann gilt

$$\int_a^b f(s) ds = F(b) - F(a).$$

Beim Riemann-Integral haben wir schon gesehen, dass sich ein  $n$ -dimensionales Integral umformen lässt zu einem  $n$ -fachen **e**indimensionalen Integral:

$$\int_{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]} f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1.$$

Für diese eindimensionalen Integrale kann es möglich sein, den oben genannten Satz zu verwenden und so einen expliziten Wert zu bekommen. Es sollte einem aber bewusst sein, dass nur die wenigsten Integrale explizit zu lösen sind. Das bedeutet, dass man sich meistens beschränkt auf einen Beweis der Beschränktheit und vielleicht sogar versucht, eine Abschätzung für die Größe zu finden.

Manchmal ist es hilfreich die Symmetrie des Gebietes zu benutzen und Pol- oder Kugelkoordinaten zu verwenden. In diesem Fall braucht man auch noch einen Transformationssatz.

Die drei Hauptbestandteile für das Berechnen eines Integrals kann man wie folgt zusammenfassen:

- Der Hauptsatz der (**e**indimensionalen) Integralrechnung.
- Der Satz von Fubini-Tonelli, um mehrdimensionale Integrale auf mehrfache eindimensionale Integrale zurückzuführen.
- Der Transformationssatz, um Integrationsgebiet und Funktion besser passend umzuformen.

**Beispiel 9.1** Sei  $f_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = (1 + \|x\|^2)^{-\alpha}$ . Wir wollen uns die folgende Frage anschauen:

Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  gilt  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ?

Indem man  $f$  approximiert mit kreisförmig definierten einfachen Funktionen,

$$(1 + (\varepsilon [\|x\| / \varepsilon + 1])^2)^{-\alpha} \leq f(x) \leq (1 + (\varepsilon [\|x\| / \varepsilon])^2)^{-\alpha},$$

kann man sich davon überzeugen, dass die Frage umformuliert werden kann zu:

Wann ist  $\int_0^\infty (1 + r^2)^{-p\alpha} r^{n-1} dr$  endlich?

Übrigens ist  $[\cdot]$  wiederum die Ganzzahlfunktion und der Faktor  $r^{n-1}$  taucht auf durch die Skalierung:

$$\text{Vol}(B_{r+\varepsilon}(0) \setminus B_r(0)) = \sigma_n ((r + \varepsilon)^n - r^n) = \sigma_n \varepsilon r^{n-1} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)).$$

Statt dieses Integral genau zu berechnen, verwenden wir eine der Abschätzungen

$$2^{-p\alpha} r^{-2p\alpha+n-1} \leq (1 + r^2)^{-p\alpha} r^{n-1} \leq r^{-2p\alpha+n-1} \text{ für } r \geq 1.$$

Weil  $\int_0^\infty (1 + r^2)^{-p\alpha} r^{n-1} dr$  endlich ist genau dann, wenn  $\int_1^\infty (1 + r^2)^{-p\alpha} r^{n-1} dr$  endlich ist, bleibt noch herauszufinden, wann

$$\int_1^\infty r^{-2p\alpha+n-1} dr$$

endlich ist. Hier lässt sich jetzt der Hauptsatz verwenden:

$$\int_1^M r^{-2p\alpha+n-1} dr = \begin{cases} \frac{1}{-2\alpha+n} (M^{-2p\alpha+n} - 1) & \text{falls } n \neq 2p\alpha, \\ \log(M) & \text{falls } n = 2p\alpha. \end{cases}$$

Man sieht, dass man für  $M \rightarrow \infty$  nur einen endlichen Wert bekommt, wenn  $2p\alpha > n$ . Die Antwort auf die Frage lautet also: für  $\alpha > \frac{n}{2p}$ .

Übrigens war Cavalieri<sup>1</sup> einer der Ersten, der Volumen berechnete, indem er die Flächeninhalte von infinitesimal dünnen Scheiben addierte. Diese Prozedur ist bekannt als das Cavalierische Prinzip.

## 9.2 Fubini und Tonelli

Wir haben bei der Riemann-Integration die technischen Schwierigkeiten gesehen, die man bekommt, wenn man den Satz von Fubini-Tonelli anwenden möchte auf ein nicht rechteckiges Gebiet. Beim Lebesgue-Integral von  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Lebesgue-messbaren Menge  $X$  kann man ohne weiteres  $f$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus X$  erweitern durch 0. Man braucht sich keine Sorgen zu machen, ob eine mögliche Unstetigkeit am Rande Probleme macht, denn das Lebesgue-Integral braucht keine Stetigkeit. Wir können uns also beschränken auf eine Formulierung der Sätze von Fubini und Tonelli auf ganz  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>1</sup>Bonaventura Francesco Cavalieri, italienischer Mathematiker, lebte von 1598 bis 1647.



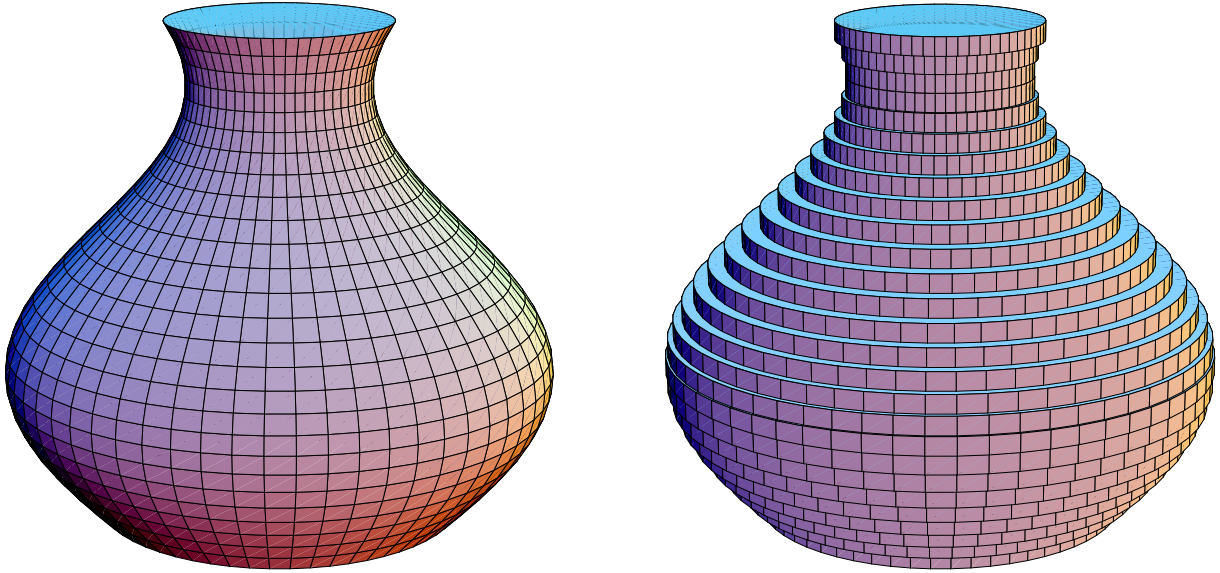


Abbildung 9.1: Der Ansatz von Cavalieri: mit Scheiben zum Volumen.

**Theorem 9.2 (Tonelli)** Für eine  $\mathcal{L}_{(n+m)}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbare<sup>2</sup> Funktion  $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow [0, \infty]$  gilt:

1.  $x \mapsto f(x, y) : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  ist  $\mathcal{L}_{(n)}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar für  $\lambda_{(m)}$ -fast alle  $y \in \mathbb{R}^m$  und  $y \mapsto f(x, y) : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$  ist  $\mathcal{L}_{(m)}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar für  $\lambda_{(n)}$ -fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
2.  $y \mapsto \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x, y) d\lambda_{(n)} : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$  ist  $\mathcal{L}_{(m)}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar und  $x \mapsto \int_{y \in \mathbb{R}^m} f(x, y) d\lambda_{(m)} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  ist  $\mathcal{L}_{(n)}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar;

3. und

$$\begin{aligned} & \int_{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}} f(x, y) d\lambda_{(n+m)} = \\ & = \int_{y \in \mathbb{R}^m} \left( \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x, y) d\lambda_{(n)} \right) d\lambda_{(m)} = \int_{x \in \mathbb{R}^n} \left( \int_{y \in \mathbb{R}^m} f(x, y) d\lambda_{(m)} \right) d\lambda_{(n)}. \end{aligned}$$

**Theorem 9.3 (Fubini)** Für eine  $\mathcal{L}_{(n+m)}$ -integrierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

1.  $x \mapsto f(x, y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $\mathcal{L}_{(n)}$ -integrierbar für  $\lambda_{(m)}$ -fast alle  $y \in \mathbb{R}^m$  und  $y \mapsto f(x, y) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $\mathcal{L}_{(m)}$ -integrierbar für  $\lambda_{(n)}$ -fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
2.  $y \mapsto \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x, y) d\lambda_{(n)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $\mathcal{L}_{(m)}$ -integrierbar und  $x \mapsto \int_{y \in \mathbb{R}^m} f(x, y) d\lambda_{(m)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $\mathcal{L}_{(n)}$ -integrierbar;

3. und

$$\begin{aligned} & \int_{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}} f(x, y) d\lambda_{(n+m)} = \\ & = \int_{y \in \mathbb{R}^m} \left( \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x, y) d\lambda_{(n)} \right) d\lambda_{(m)} = \int_{x \in \mathbb{R}^n} \left( \int_{y \in \mathbb{R}^m} f(x, y) d\lambda_{(m)} \right) d\lambda_{(n)}. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Der Index in  $\mathcal{L}_{(k)}$  und  $\lambda_{(k)}$  ist angebracht, um deutlich zu machen, dass es Lebesgue-Messbarkeit und Lebesgue-Maß in  $\mathbb{R}^k$  betrifft.



Abbildung 9.2: Bonaventura Cavalieri, Leonida Tonelli (1885-1946), Guido Fubini (1879-1943). Fubini musste 1938 wegen seiner jüdischen Wurzeln die Professur in Torino aufgeben. Tonelli hat mit dem faschistischen Regime mitgewirkt. Siehe: M. Emmer (Ed.), Mathematics and Culture 1, Springer 2004.

Ein erster Schritt zum Beweis von Tonelli als auch von Fubini ist das folgende Theorem:

**Theorem 9.4** Für jede Menge  $A \in \mathcal{L}_{(n+m)}$  gilt:

1.  $A_x := \{y \in \mathbb{R}^m; (x, y) \in A\} \in \mathcal{L}_{(m)}$  für  $\lambda_{(n)}$ -fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
2.  $x \mapsto \lambda_{(m)}(A_x)$  ist  $\mathcal{L}_{(n)}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar;
3.  $\lambda_{(m+n)}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_{(m)}(A_x) d\lambda_{(n)}$ .

**Bemerkung 9.4.1** Dieses Theorem ist eine Erweiterung des Cavalierischen Prinzips. Das Integral in der dritten Zeile ist in  $[0, \infty]$  definiert.

Für einen Beweis dieses Ergebnisses verwendet man, dass  $(\mathbb{R}^k, \mathcal{L}, \lambda)$  die Vervollständigung von  $(\mathbb{R}^k, \mathcal{A}_{\mathcal{T}}, \lambda|_{\mathcal{A}_{\mathcal{T}}})$  ist, und dass die Blöcke  $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_k, b_k)$  eine Basis für die Standardtopologie  $\mathcal{T}$  bilden.

Der zweite Schritt besteht aus der Anwendung des letzten Theorems auf elementare Funktionen, um so das Ergebnis von Fubini und Tonelli für elementare Funktionen zu bekommen.

Der letzte Schritt verwendet die Limesätze (Fatou und Folgen) um zu zeigen, dass man auch allgemeinere Funktionen zulassen kann.

## 9.3 Transformationen

Beim Riemann-Integral hat man schon, sowohl Polar- und Zylinderkoordinaten als auch allgemeine Koordinatensysteme verwendet, um bestimmte Integrale explizit berechnen zu können. Einzelne Stellen, an denen die auftauchenden Transformationen singulär werden, hat man lokal mit einem Limesverfahren bewältigen können. Wir werden sehen, dass sich auch da das Lebesgue-Integral großzügiger verhält. Wir werden die Beweise nur in groben Zügen erklären.

Die ersten Schritte sind ähnlich wie beim Riemann-Integral:

**Schritt 1.** Sei  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine invertierbare lineare Abbildung und  $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ . Dann gilt

$$\text{Vol}(A(R)) = |\det A| \text{Vol}(R).$$

In zwei Dimensionen gilt für den Flächeninhalt  $I_P$  des Parallelogramms  $P$  mit den Ecken  $(0, 0)$ ,  $(a_1, a_2)$ ,  $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$  und  $(b_1, b_2)$ :

$$I_P = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right|.$$

In drei Dimensionen gilt für das Volumen  $V_P$  des Parallelepipeds, aufgespannt durch die Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

dass

$$V_P = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right|.$$

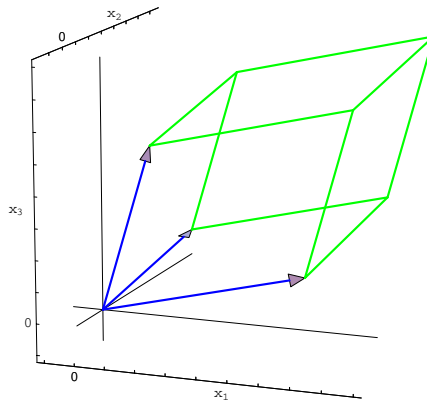


Abbildung 9.3: Das Volumen vom Parallelepiped kann man mit einer Determinante berechnen.

**Schritt 2.** Sei  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine invertierbare lineare Abbildung und  $\Omega \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt  $A(\Omega) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  und falls  $\lambda(\Omega) < \infty$  gilt

$$\lambda(A(\Omega)) = |\det A| \lambda(\Omega).$$

**Schritt 3.** Als nächstes ersetzen wir invertierbare lineare Abbildungen durch Diffeomorphismen. Wir erinnern uns an die Definition:

**Definition 9.5** Seien  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine bijektive Abbildung  $\Phi : X \rightarrow Y$  mit  $\Phi$  und  $\Phi^{inv}$   $C^1$ -Abbildungen (differenzierbar mit stetiger Ableitung), nennt man ein **Diffeomorphismus** von  $X$  auf  $Y$ .

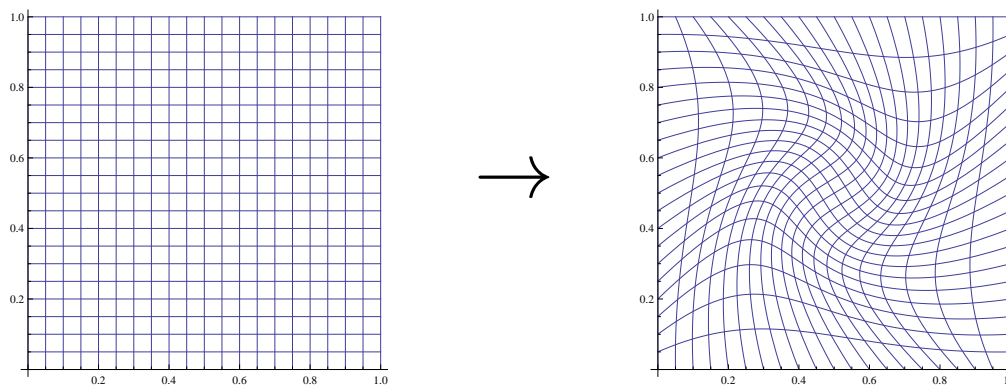


Abbildung 9.4: Darstellung eines Diffeomorphismus von  $(0, 1)^2$  zu  $(0, 1)^2$ .

Für einen solchen Diffeomorphismus folgt aus  $\Phi^{inv}(\Phi(x)) = x$  und der Kettenregel, dass

$$(\Phi^{inv})'(\Phi(x)) \Phi'(x) = I.$$

Es folgt, dass die  $n \times n$ -Matrix

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und dass

$$(\Phi^{inv})'(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{-1}_{x=\Phi^{inv}(y)}.$$

Außerdem finden wir für  $y = \Phi(x)$ , dass

$$\det\left((\Phi^{inv})'(y)\right) = \det\left((\Phi'(x))^{-1}\right) = \frac{1}{\det(\Phi'(x))}.$$

**Lemma 9.6** Sei  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  und sei  $\Phi : X \rightarrow Y$  ein Diffeomorphismus, dann gilt für jedes  $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  mit  $R \subset X$ , dass

$$\lambda(\Phi(R)) = \int_R |\det(\Phi')| d\lambda. \quad (9.1)$$

Um dieses Lemma zu beweisen, verwendet man, dass lokal eine differenzierbare Abbildung fast eine lineare Abbildung ist. Das heißt,  $R$  lässt sich in endlich viele kleine Teilblöcke

$$R_\alpha = [a_{\alpha,1}, a_{\alpha,1} + \Delta x_1] \times \cdots \times [a_{\alpha,n}, a_{\alpha,n} + \Delta x_n]$$

verteilen derart, dass der Inhalt  $\lambda(\Phi(R_\alpha))$  eines dieser Teilblöcke fast gleich  $|\det(\Phi'(a_\alpha))| \lambda(R_\alpha)$  ist. Mit dem Satz von Taylor gilt für  $v \in \mathbb{R}^n$  und  $h \in \mathbb{R}$ , dass<sup>3</sup>

$$\Phi(a_\alpha + hv) = \Phi(a_\alpha) + h \Phi'(a_\alpha) \cdot v + h \mathcal{O}(1). \quad (9.2)$$

<sup>3</sup>Hier ist  $\mathcal{O}$  das kleine Ordnungssymbol von Landau:

$$f(h) = \mathcal{O}(h^k) \text{ für } h \downarrow 0 \iff \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(h)}{h^k} = 0.$$

Man kann mit (9.2) zeigen, dass

$$\lambda(\Phi(R_\alpha)) = |\det(\Phi'(a_\alpha))| \lambda(R_\alpha) + \Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_n \mathcal{O}(1)$$

und  $\mathcal{O}(1) \rightarrow 0$  für  $\max_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_i| \rightarrow 0$ .

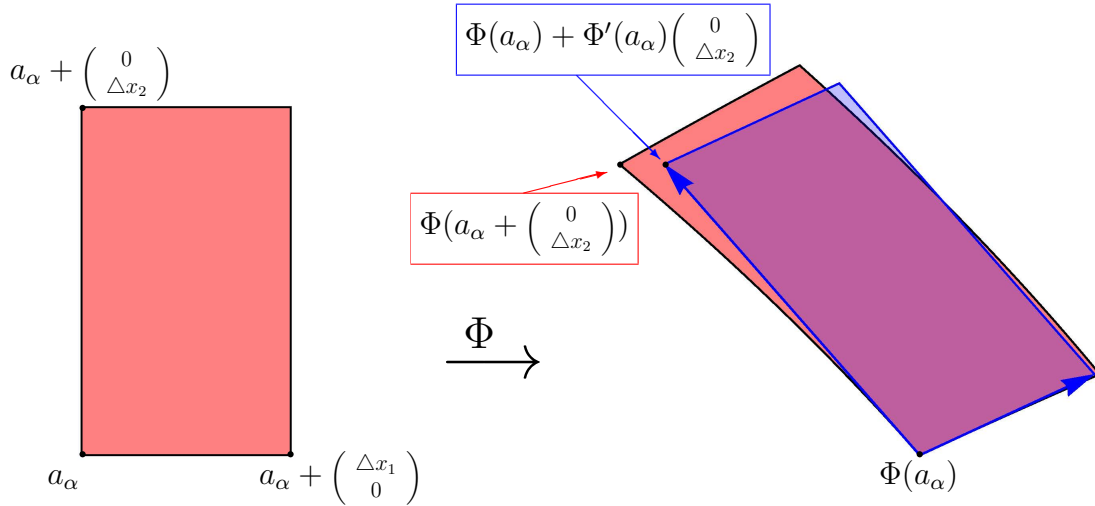


Abbildung 9.5: Links  $R_\alpha$  mit einigen seiner Ecken. Rechts in rot  $\Phi(R_\alpha)$  und in blau das Parallelepiped  $\Phi(a_\alpha) + \Phi'(a_\alpha)(R_\alpha - a_\alpha)$ .

Summiert man, und bedenkt, dass man in der  $x_i$ -Richtung  $R = \bigcup_{\alpha=1}^m R_\alpha$  für passende  $R_\alpha$  in  $\frac{b_i - a_i}{\Delta x_i}$ -Stücke verteilen soll, so folgt

$$\begin{aligned} \lambda(\Phi(R)) &= \sum_{\alpha=1}^m \lambda(\Phi(R_\alpha)) = \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \left( |\det(\Phi'(a_\alpha))| \lambda(R_\alpha) + \Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_n \mathcal{O}(1) \right) \\ &= \left( \sum_{\alpha=1}^m |\det(\Phi'(a_\alpha))| \lambda(R_\alpha) \right) + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Das heißt, für jedes  $\varepsilon > 0$  kann man  $\max_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_i|$  genügend klein wählen, sodass folgt:

$$\sum_{\alpha=1}^m |\det(\Phi'(a_\alpha))| \lambda(R_\alpha) - \varepsilon \leq \lambda(\Phi(R)) \leq \sum_{\alpha=1}^m |\det(\Phi'(a_\alpha))| \lambda(R_\alpha) + \varepsilon.$$

Aus der Stetigkeit von  $x \mapsto |\det(\Phi'(x))|$  folgt dann, dass für  $\max_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_i|$  genügend klein gilt

$$\sum_{\alpha=1}^m \int_{R_\alpha} |\det(\Phi'(x_\alpha))| d\lambda \leq \sum_{\alpha=1}^m \int_{R_\alpha} |\det(\Phi'(\cdot))| d\lambda + \varepsilon = \int_R |\det(\Phi'(\cdot))| d\lambda + \varepsilon$$

und

$$\sum_{\alpha=1}^m \int_{R_\alpha} |\det(\Phi'(x_\alpha))| d\lambda \geq \sum_{\alpha=1}^m \int_{R_\alpha} |\det(\Phi'(\cdot))| d\lambda - \varepsilon = \int_R |\det(\Phi'(\cdot))| d\lambda - \varepsilon.$$

Weil man  $\varepsilon > 0$  beliebig klein nehmen kann, folgt (9.1).

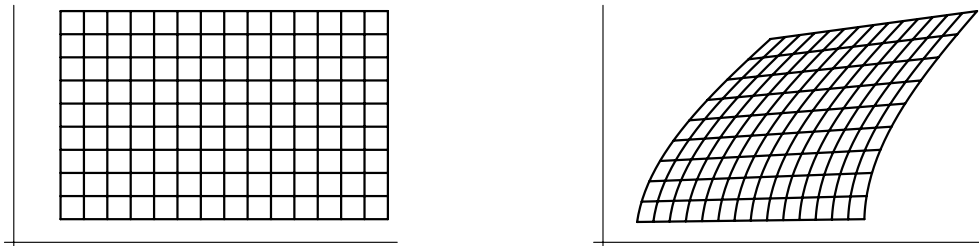
**Schritt 4.**

**Lemma 9.7** Sei  $X, Y$  und  $\Phi$  wie oben beschrieben, dann gilt für jedes  $\Omega \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\Omega \subset X$ , dass

$$\lambda(\Phi(\Omega)) = \int_{\Omega} |\det(\Phi')| d\lambda. \quad (9.3)$$

Man kann  $\Omega$  mit abzählbar vielen Blöcken überdecken. Für endlich viele verwendet man das letzte Lemma. Für den Limes verwendet man den Satz für majorisierte Konvergenz

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda\left(\Phi\left(\bigcup_{i=0}^m R_i\right)\right) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \lambda(\Phi(R_i)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_X \sum_{i=0}^m \mathbf{1}_{R_i} |\det(\Phi')| d\lambda = \\ &= \int_X \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \mathbf{1}_{R_i} |\det(\Phi')| d\lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_X \mathbf{1}_{\bigcup_{i=0}^m R_i} |\det(\Phi')| d\lambda. \end{aligned}$$



Es folgt

$$\lambda\left(\Phi\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} R_i\right)\right) = \int_{\bigcup_{i=0}^{\infty} R_i} |\det(\Phi')| d\lambda$$

und wenn  $\bigcup_{i=0}^{\infty} R_i$  die Menge  $\Omega$  approximiert, folgt (9.3).

**Schritt 5.** Sei jetzt  $f : Y \rightarrow [0, \infty)$  eine einfache Funktion. Wenn  $f = \sum_{i=0}^m c_i \mathbf{1}_{A_i}$  kann man sofort das Ergebnis aus dem letzten Schritt anwenden. Wenn man  $m$  nach unendlich gehen lässt, folgt mit Hilfe monotoner Konvergenz, denn es gilt  $c_i \geq 0$  für alle  $i$ , dass

$$\begin{aligned} \int_Y f d\lambda &= \int_Y \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m c_i \mathbf{1}_{A_i} d\lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_Y \sum_{i=0}^m c_i \mathbf{1}_{A_i} d\lambda = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m c_i \int_Y \mathbf{1}_{A_i} d\lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m c_i \int_X \mathbf{1}_{\Phi^{-1}(A_i)} |\det(\Phi')| d\lambda = \\ &= \int_X \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m c_i \mathbf{1}_{\Phi^{-1}(A_i)} |\det(\Phi')| d\lambda = \int_X (f \circ \Phi) |\det(\Phi')| d\lambda. \end{aligned}$$

Bemerke, dass für  $f = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i \mathbf{1}_{A_i}$  mit  $A_i$  disjunkt gilt  $f \circ \Phi = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i \mathbf{1}_{\Phi^{-1}(A_i)}$ .

**Schritt 6.** Schlussendlich soll man zeigen, dass das folgende Diagramm stimmt für eine Folge von elementaren Funktionen  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , die nach  $f$  konvergieren:

$$\int_Y f d\lambda \longleftarrow \int_Y f_k d\lambda = \int_X (f_k \circ \Phi) |\det(\Phi')| d\lambda \longrightarrow \int_X (f \circ \Phi) |\det(\Phi')| d\lambda.$$

**Theorem 9.8 (Transformationsatz)** Seien  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  offen und sei  $\Phi \in C^1(\bar{X}; \bar{Y})$  bijektiv mit  $\Phi^{inv} \in C^1(\bar{Y}; \bar{X})$ . Wenn  $f \in \mathcal{L}(Y)$ , dann gilt

$$\int_Y f \, d\lambda = \int_X (f \circ \Phi) |\det \Phi'| \, d\lambda. \tag{9.4}$$

**Bemerkung 9.8.1** Die Annahme, dass  $\Phi \in C^1(\bar{X}; \bar{Y})$  gilt, liefert  $|\det \Phi'| \in C^0(\bar{X})$ . Für beschränkte Gebiete  $X$  folgt so  $f \circ \Phi \in \mathcal{L}(X)$ . Allgemein gilt, dass  $(f \circ \Phi) |\det \Phi'|$  integrierbar ist auf  $X$ .

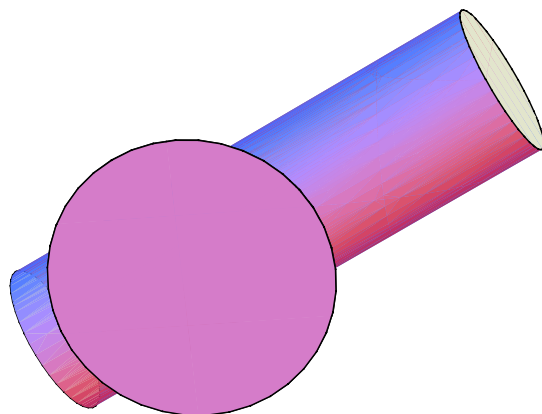
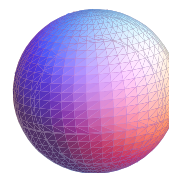
Man kann sogar einige Stellen zulassen, an denen  $\Phi$  lokal nicht bijektiv ist.

**Theorem 9.9 (Erweiterter Transformationsatz)** Seien  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  und sei  $\Phi : X \rightarrow Y$  eine  $C^1$ -Abbildung. Falls  $\Omega \subset X$  offen ist, und derart, dass  $\Phi|_\Omega : \Omega \rightarrow \Phi(\Omega)$  ein Diffeomorphismus ist, dann gilt für jede  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_T$ -messbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ , dass

$$\int_{\Phi(\Omega)} f \, d\lambda = \int_\Omega (f \circ \Phi) |\det \Phi'| \, d\lambda.$$

**Bemerkung 9.9.1** Für  $\mathcal{L}$ -integrierbare Funktionen gilt dies auch, wenn sie das Vorzeichen wechseln.

## 9.4 Kugeln und Zylinder



**Definition 9.10 Kugelkoordinaten** in  $\mathbb{R}^n$  kann man beschreiben durch  $(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$  mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{n-3} \\ \varphi_{n-2} \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \dots \sin \varphi_{n-1} \\ r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \dots \sin \varphi_{n-1} \\ r \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \dots \sin \varphi_{n-1} \\ \vdots \\ r \cos \varphi_{n-3} \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1} \\ r \cos \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1} \\ r \cos \varphi_{n-1} \end{pmatrix}$$

mit  $r \in [0, \infty)$ ,  $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$  und  $\varphi_2, \dots, \varphi_{n-1} \in [0, \pi)$ ,

oder auch durch

$$x = r \omega$$

mit  $r \in [0, \infty)$  und  $\omega \in \partial B_1(0) = \{\omega \in \mathbb{R}^n; |\omega| = 1\} =: \mathbb{S}^{n-1}$ .

**Bemerkung 9.10.1** Man findet

$$\left| \det \left( \Phi' \begin{pmatrix} r \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix} \right) \right| = r^{n-1} P_n(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$$

und schreibt oft

$$r^{n-1} dr d\omega \quad \text{statt} \quad r^{n-1} P_n(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}$$

im Integral.

Die Umkehrabbildung kann man grob wie folgt konstruieren:

$$\begin{aligned} r^2 &= x_1^2 + \dots + x_n^2, \\ \cot \varphi_1 &= \frac{x_2}{x_1}, \\ \cot \varphi_2 &= \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \\ \cot \varphi_3 &= \frac{x_4}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \\ &\vdots \\ \cot \varphi_{n-1} &= \frac{x_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\varphi_1$  durch  $\cot \varphi_1 = \frac{x_2}{x_1}$  nicht eindeutig festgelegt, sondern man nimmt  $\varphi_1 \in (0, \pi)$ , falls  $x_2 > 0$  und  $\varphi_1 \in (\pi, 2\pi)$  falls  $x_2 < 0$ . Falls  $x_2 = 0$  oder  $x_1 = 0$  ist  $\cot \varphi_1 = \frac{x_2}{x_1}$  auch nicht definiert. Ähnliches passiert bei  $\varphi_2$  bis  $\varphi_{n-1}$ .

Verallgemeinerte **Zylinderkoordinaten** bekommt man, indem man Kugelkoordinaten nur auf eine 'Teildimension' anwendet:  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  und man nimmt Koordinaten  $(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}, x_{m+1}, \dots, x_n)$ .

**Lemma 9.11** Das Volumen der Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$  ist gleich  $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$ .

|                                     |   |       |                  |                    |                     |                    |                       |                     |                       |                      |                         |
|-------------------------------------|---|-------|------------------|--------------------|---------------------|--------------------|-----------------------|---------------------|-----------------------|----------------------|-------------------------|
| $n :$                               | 1 | 2     | 3                | 4                  | 5                   | 6                  | 7                     | 8                   | 9                     | 10                   | 11                      |
| $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)} :$ | 2 | $\pi$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi^2$ | $\frac{8}{15}\pi^2$ | $\frac{1}{6}\pi^3$ | $\frac{16}{105}\pi^3$ | $\frac{1}{24}\pi^4$ | $\frac{32}{945}\pi^4$ | $\frac{1}{120}\pi^5$ | $\frac{64}{10395}\pi^5$ |

**Bemerkung 9.11.1** Die Gammafunktion  $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Man hat

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  für  $x > 0$ ,



- $\Gamma(1) = 1$  und  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .
- Aus den ersten beiden Ergebnissen folgt  $n! = \Gamma(n+1)$ .

Man beweist dies wie folgt:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \left( [-t^x e^{-t}]_0^M + \int_0^M x t^{x-1} e^{-t} dt \right) = \\ &= x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x).\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \quad \text{und} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

**Beweis.** Wir setzen  $\sigma_n = \text{Vol}\{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1\}$  und verwenden die vollständige Induktion getrennt für gerade und ungerade Indizes. Man kennt  $\sigma_1 = 2$  und  $\sigma_2 = \pi$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \int_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |x| \leq 1}} 1 dx = \int_{\substack{z \in \mathbb{R}^2 \\ |z| \leq 1}} \int_{\substack{y \in \mathbb{R}^{n-2} \\ |y| \leq \sqrt{1-|z|^2}}} 1 dy dz = \\ &= \int_{\substack{z \in \mathbb{R}^2 \\ |z| \leq 1}} \sigma_{n-2} (1 - |z|^2)^{\frac{n-2}{2}} dz = \\ &= \sigma_{n-2} \int_{r=0}^1 \int_0^{2\pi} (1 - r^2)^{\frac{n}{2}-1} r d\varphi dr = \\ &= 2\pi \sigma_{n-2} \left[ -\frac{1}{n} (1 - r^2)^{n/2} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{n} \sigma_{n-2}.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\sigma_{2k} &= \frac{(2\pi)^{k-1}}{2k(2k-2)\dots 4} \sigma_2 = \frac{\pi^k}{k!} = \frac{\pi^k}{\Gamma(1+k)}, \\ \sigma_{2k+1} &= \frac{(2\pi)^k}{(2k+1)(2k-1)\dots 3} \sigma_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \pi^k}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)} = \frac{\pi^{k+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)}.\end{aligned}$$

Die beiden Formeln kann man zusammenfassen zu  $\sigma_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$ . ■

**Lemma 9.12** *Das  $(n-1)$ -dimensionale Volumen der Einheitssphäre in  $\mathbb{R}^n$  (oder Hyperflächeninhalt der Oberfläche der Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$ ) ist gleich  $\frac{n \pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$ .*

**Beweis.** Setze  $\sigma_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$ . Der Flächeninhalt der Sphäre mit Radius  $r$  kann man wie folgt berechnen aus dem Volumen der Kugel:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\text{Vol}(B_{r+\varepsilon}(0)) - \text{Vol}(B_r(0))}{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial r} \text{Vol}(B_r(0)) = \sigma_n \frac{\partial}{\partial r} r^n = n \sigma_n r^{n-1}.$$

Hier ist  $\varepsilon$  sozusagen die Dicke der Schicht  $B_{r+\varepsilon}(0) \setminus B_r(0)$ . ■



# Analysis 3, Woche 10

## Mannigfaltigkeiten I



### 10.1 Definition einer Mannigfaltigkeit

Die Definition einer Mannigfaltigkeit braucht den Begriff Diffeomorphismus, den wir in Definition 9.5 festgelegt haben. Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offene Gebiete, dann nennt man eine Funktion  $f : U \rightarrow V$  einen Diffeomorphismus, wenn  $f$  bijektiv und stetig differenzierbar ist, und auch  $f^{inv}$  stetig differenzierbar ist.

**Beispiel 10.1** Die Funktion

$$f : (0, 1) \times (0, \pi) \rightarrow \left\{ (x, y) ; |x| < 1 \text{ und } 0 < y < \sqrt{1 - x^2} \right\}$$

mit  $f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  ist ein Diffeomorphismus.

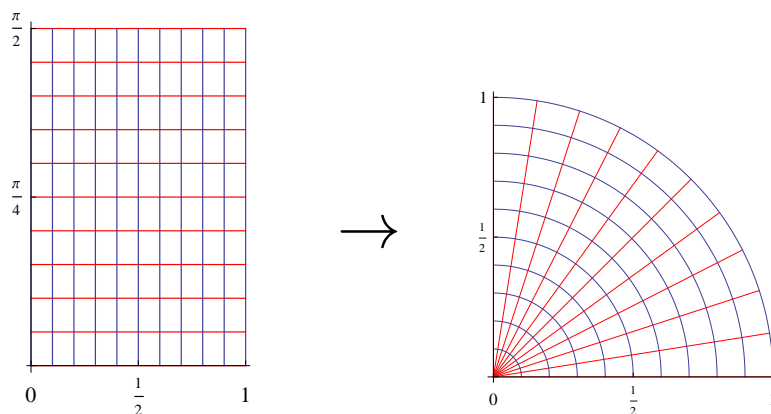


Abbildung 10.1: Das Bild zu Beispiel 10.1

**Beispiel 10.2** Die Funktion  $f : (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$  mit  $f(x) = x^3$  ist kein Diffeomorphismus. Man sieht sofort, dass  $f$  bijektiv und stetig differenzierbar ist. Jedoch ist  $f^{inv}$  nicht differenzierbar in 0. Siehe die nächste Abbildung.

Das letzte Beispiel zeigt, dass die Tatsache alleine, dass  $f$  bijektiv und stetig differenzierbar ist, nicht impliziert, dass auch  $f^{inv}$  differenzierbar ist. Wenn man jedoch weiß, dass  $f$  ein Diffeomorphismus ist, dann kann man schon etwas zu den höheren Ableitungen sagen.

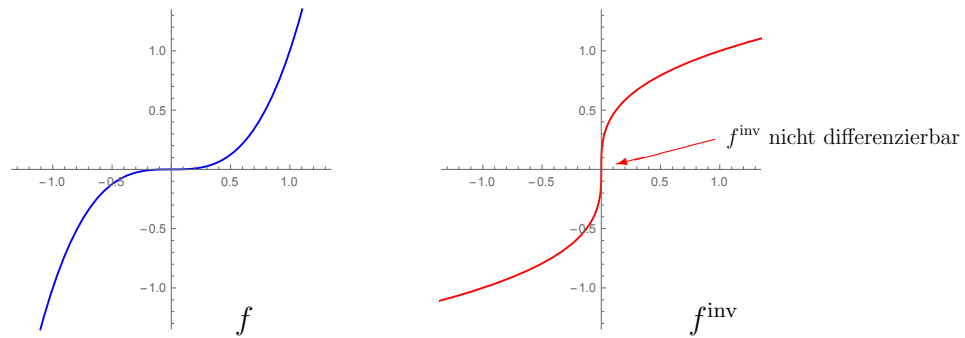


Abbildung 10.2: Das Bild zu Beispiel 10.2

**Lemma 10.3** Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offene Gebiete. Wenn  $f : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus ist und  $f \in C^k(U)$  mit  $k \geq 2$ , dann gilt auch  $f^{\text{inv}} \in C^k(V)$ .

**Beweis.** Wenn  $f$  und  $f^{\text{inv}}$  stetig differenzierbar sind, gilt

$$(f^{\text{inv}})'(y) = (f')^{-1}(f^{\text{inv}}(y)).$$

Sei  $1 < m \leq k$ . Mit Hilfe der Kettenregel, kann man jede Ableitung  $m$ -ter Ordnung von  $f^{\text{inv}}$  zurückführen auf Zusammenstellungen von  $(f')^{-m_1}$  mit  $m_1 \leq m$ , von Ableitungen höchstens  $m$ -ter Ordnung von  $f$  und Ableitungen höchstens  $(m-1)$ -ter Ordnung von  $f^{\text{inv}}$ . Mit Induktion nach  $m$  folgt die Behauptung für  $m \in \{2, \dots, k\}$ . ■

**Definition 10.4** Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt  **$m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit** in  $\mathbb{R}^n$ , wenn zu jedem  $x \in M$

- eine offene Umgebung  $U_x \subset \mathbb{R}^n$  von  $x$  existiert,
- eine offene Menge  $V \subset \mathbb{R}^n$  existiert und
- es einen Diffeomorphismus  $f : U_x \rightarrow V$  gibt derart, dass

$$f(U_x \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0, \dots, 0\}). \quad (10.1)$$

**Bemerkung 10.4.1** Kurzgefasst kann man sagen: Zu jedem  $x \in M$  gibt es lokal (auf  $U_x$ ) einen Diffeomorphismus  $f$  von  $U_x$  auf  $V$  mit (10.1).

**Definition 10.5** Sei  $2 \leq k \in \mathbb{N}$ . Wenn man für jedes  $x \in M$  so einen Diffeomorphismus  $f$  finden kann mit  $f \in C^k$ , dann nennt man  $M$  eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit.

**Beispiel 10.6** Die Sphäre  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| = 1\}$  ist eine Mannigfaltigkeit. Die Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2),$$

ist für  $x$  mit  $x_3 > 0$  ein Diffeomorphismus und  $f(S^2) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ .

Die Differenzierbarkeit von  $f$  ist offensichtlich. Dann braucht man bloß noch die Inverse zu betrachten. Nach dem Theorem über inverse Funktionen folgt lokal die Existenz einer differenzierbaren inversen Funktion, wenn  $\det \left( \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{ij} \right) \neq 0$  gilt:

$$\det \left( \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{ij} \right) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 \end{pmatrix} = -2x_3 \neq 0.$$

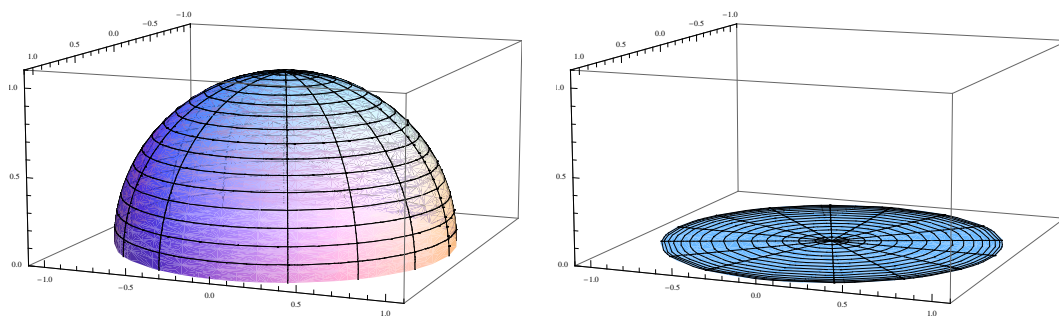


Abbildung 10.3: Eine halbe Sphäre plattgemacht

Die Funktion  $f$ , eingeschränkt auf  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ , ist injektiv, denn

$$(x_1, x_2, 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) = (y_1, y_2, y_3)$$

hat für  $x_3 > 0$  höchstens eine Lösung:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left( y_1, y_2, \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2 - y_3} \right).$$

Für  $x_3 < 0$  kann man die gleiche Funktion  $f$  als Diffeomorphismus verwenden. Es bleiben noch der Ring mit  $x_3 = 0$ . Für  $x$  mit  $x_3 = 0$  und  $x_2 > 0$ , beziehungsweise  $x_2 < 0$ , nimmt man stattdessen:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2).$$

Für  $x$  mit  $x_3 = x_2 = 0$  kann man

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$$

nehmen.

**Beispiel 10.7** Der Kegel  $K = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$  ist keine Mannigfaltigkeit. In einer Umgebung von  $(0, 0, 0)$  gibt es keinen Diffeomorphismus, der  $K$  auf nette Art plattschlägt. Wenn man  $(0, 0, 0)$  aus dem Kegel entfernt, hat man eine Mannigfaltigkeit.

**Lemma 10.8** Sei  $X$  eine offene Menge in  $\mathbb{R}^m$  und  $g : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine  $C^1$ -Funktion. Dann ist der Graph  $G = \{(x, g(x)); x \in X\}$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^{m+k}$ .

**Beweis.** Man nehme  $f : X \times \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit

$$f(x, y) = (x, y - g(x)) \text{ für } x \in X, y \in \mathbb{R}^k.$$

Dann gilt  $f(G) = X \times \{0, \dots, 0\}$  und

$$\det \left( (\partial_j f_i)_{ij} \right) = \det \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -\frac{\partial g}{\partial x_i} & I_k \end{pmatrix} = 1.$$

■

## 10.2 Heuristik und Mathematik beim Integrieren

**Eindimensionales.** Den einfachsten Mannigfaltigkeiten sind wir schon begegnet: den stetig differenzierbaren Kurven. Wenn man eine Kurve beschrieben hat, ist eine der ersten Fragen, die aufkommt, wie lang sie ist. Und wenn die Kurve einen Weg beschreibt, entlang welcher man einer Kraft ausgesetzt ist, möchte man die Arbeit berechnen können.

Wir haben uns eine Formel für die Länge einer Kurve gebastelt, die für glatte Bögen das Ergebnis brachte, das man im alltäglichen Leben haben möchte.

**Definition 10.9** Für eine stetig differenzierbare Funktion  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert man die Länge als

$$\ell(x) := \int_0^T |x'(t)| dt.$$

Man möchte, dass diese Länge für eine Gerade  $[a, b] = \{x; x = ta + (1-t)b \text{ mit } t \in [0, 1]\}$  übereinstimmt mit der üblichen eindimensionalen Länge:

$$I_1([a, b]) = |a - b|.$$

Approximieren wir eine Kurve mit Geraden, dann kommt man bei einer stetig differenzierbaren Kurve tatsächlich im Limes zu einer vernünftigen Antwort. Setze

$$\ell_m(x) := \sum_{k=0}^{m-1} I_1[x(t_{k+1}) - x(t_k)],$$

mit  $t_k = \frac{k}{m}T$  und Schrittweite  $\Delta t = \frac{1}{m}T$ . Wenn  $x$  differenzierbar ist, dann gilt für jede Komponente von  $x$ :

$$x_i(t_{k+1}) - x_i(t_k) = x'_i(t_k + \theta_{i,k}) \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t)$$

( $\mathcal{O}$  ist das kleine Größenordnungssymbol<sup>1</sup> von Landau) und

$$\begin{aligned} \ell_m(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} I_1[x(t_{k+1}) - x(t_k)] = \sum_{k=0}^{m-1} |x(t_{k+1}) - x(t_k)| = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (|x'(t_k + \theta_{i,k})| \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t)) = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} |x'(t_k + \theta_{i,k})| \Delta t + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Weil  $x$  und also auch die Komponenten stetig differenzierbar sind, gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ell_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^{m-1} |x'(t_k + \theta_{i,k})| \Delta t + \mathcal{O}(1) \right) = \int_0^T |x'(t)| dt = \ell(x).$$

<sup>1</sup>Das kleine Größenordnungssymbol von Landau:  $f(x) = \mathcal{O}(x^n)$  für  $x \downarrow 0$ , wenn  $\lim_{x \downarrow 0} x^{-n} f(x) = 0$ . Es gibt auch das große Größenordnungssymbol von Landau. Man schreibt  $f(x) = \mathcal{O}(x^n)$  bei  $x = 0$ , wenn es  $M \in \mathbb{R}$  gibt mit  $|x^{-n} f(x)| \leq M$  in einer Umgebung von  $x = 0$ . Beide Symbole werden ähnlich auch für  $x \rightarrow \infty$  benutzt.

**Beispiel 10.10** Die Länge der Normalparabel  $y = x^2$  zwischen  $(-1, 1)$  und  $(1, 1)$  findet man dann wie folgt: Die Kurve kann man beschreiben durch  $k : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $k(x) = (x, x^2)$ . Man hat

$$\begin{aligned} \ell(x) &= \int_{-1}^1 |k'(x)| dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1^2 + (2x)^2} dx = 2 \\ &= \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5} + 2) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5} - 2) + \sqrt{5} = \frac{1}{4} \ln(9 + 4\sqrt{5}) + \sqrt{5}. \end{aligned}$$

**Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten.** Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten in  $\mathbb{R}^3$  sind zum Beispiel die Kugel oder das Paraboloid. Beide lassen sich noch relativ einfach beschreiben. Man kann sich aber auch fragen, wie groß der Flächeninhalt (eines Teils) ist. Auch hier möchten wir zu einer Definition kommen, die zu unserer Vorstellung passt.

Dazu werden wir eine Formel ableiten für die Oberfläche des zweidimensionalen Parallelogramms in drei Dimensionen.

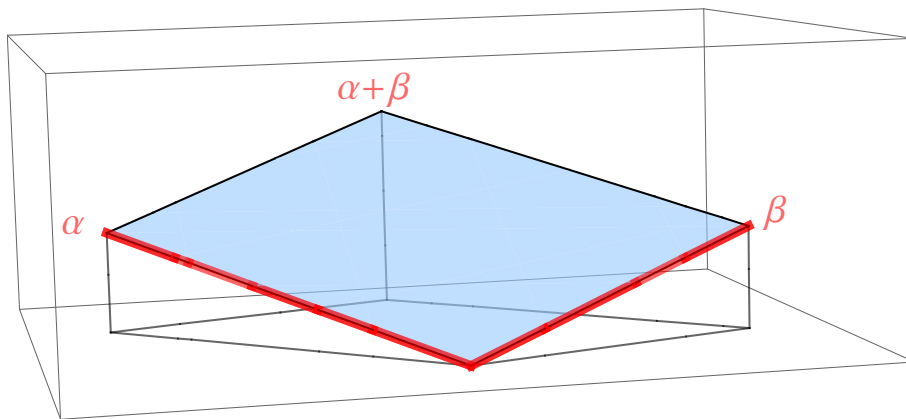


Abbildung 10.4: Für zwei Vektoren  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$  betrachten wir das Parallelogramm mit den Eckpunkten  $0, \alpha, \alpha + \beta$  und  $\beta$ .

Nennen wir  $\text{Vol}_2^{(3)}(P)$  den Flächeninhalt des zweidimensionalen Parallelogramms in  $\mathbb{R}^3$ . Wenn das Zweibein  $\{\alpha, \beta\}$  einen senkrechten Winkel bilden würde, dann findet man  $\text{Vol}_2^{(3)}(P) = |\alpha| |\beta|$ , mit  $|\alpha|$  und  $|\beta|$  die Euklidischen Längen der Vektoren. Für nicht rechtwinklige Zweibeine kann der Flächeninhalt berechnet werden, indem man  $\beta$  ersetzt durch  $\tilde{\beta} - t\alpha$  und  $t \in \mathbb{R}$  derartig wählt, dass  $\alpha$  und  $\tilde{\beta} := \beta - t\alpha$  senkrecht stehen. Dies ist der Fall für  $t = \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha}$ , denn dann gilt

$$\alpha \cdot \tilde{\beta} = \alpha \cdot \left( \beta - \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha} \alpha \right) = 0.$$

<sup>2</sup>Mit der Substitution  $2x = \sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$  folgt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1^2 + (2x)^2} dx &= \frac{1}{2} \int_{\ln(\sqrt{5}-2)}^{\ln(\sqrt{5}+2)} \sqrt{1 + (\sinh t)^2} \cosh t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\ln(\sqrt{5}-2)}^{\ln(\sqrt{5}+2)} (\cosh t)^2 dt = \frac{1}{8} \int_{\ln(\sqrt{5}-2)}^{\ln(\sqrt{5}+2)} (e^{2t} + 2 + e^{-2t}) dt = \\ &= \left[ \frac{1}{16} e^{2t} + \frac{1}{4} t - \frac{1}{16} e^{-2t} \right]_{\ln(\sqrt{5}-2)}^{\ln(\sqrt{5}+2)} = \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5} + 2) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5} - 2) + \frac{1}{2} \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Also ist  $\{\alpha, \tilde{\beta}\}$  ein rechtwinkliges Zweibein, und  $\tilde{P} = \{x \in \mathbb{R}^n; x = t\alpha + s\tilde{\beta} \text{ mit } s, t \in [0, 1]\}$  hat den gleichen Flächeninhalt wie  $P$ :

$$\begin{aligned} \text{Vol}_2^{(3)}(P) &= \text{Vol}_2^{(3)}(\tilde{P}) = |\alpha| |\tilde{\beta}| = |\alpha| \left| \beta - \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha} \alpha \right| = \\ &= |\alpha| \sqrt{\beta \cdot \beta - 2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha} (\alpha \cdot \beta) + \frac{(\alpha \cdot \beta)^2}{(\alpha \cdot \alpha)^2} (\alpha \cdot \alpha)} = \\ &= \sqrt{(\alpha \cdot \alpha) (\beta \cdot \beta) - (\alpha \cdot \beta)^2} \\ &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} \alpha \cdot \alpha & \alpha \cdot \beta \\ \alpha \cdot \beta & \beta \cdot \beta \end{pmatrix}}. \end{aligned} \quad (10.2)$$

**Bemerkung 10.10.1** Vielleicht erinnern Sie sich noch, dass man für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$  das Kreuzprodukt definiert durch

$$\gamma := \alpha \times \beta = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \mathbf{e}_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \mathbf{e}_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 \\ \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2 \\ \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \end{pmatrix}.$$

Mit ein wenig Rechnen zeigt man, dass in  $\mathbb{R}^3$  gilt:

$$|\alpha \times \beta| = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \alpha \cdot \alpha & \alpha \cdot \beta \\ \alpha \cdot \beta & \beta \cdot \beta \end{pmatrix}} = \text{Vol}_2^{(3)}(P).$$

**Definition 10.11** Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$  definiert man den Flächeninhalt von

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n; x = t\alpha + s\beta \text{ mit } s, t \in [0, 1]\}$$

durch

$$\text{Vol}_2^{(3)}(P) = \sqrt{(\alpha \cdot \alpha) (\beta \cdot \beta) - (\alpha \cdot \beta)^2}. \quad (10.3)$$

Sei  $M$  eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$ , parametrisiert durch  $(s, t) \mapsto \Phi(s, t) : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  mit  $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  ein Rechteck. Man betrachtet

$$R = \bigcup_{i=0}^{\ell-1} \bigcup_{j=0}^{\ell-1} [s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}] \text{ mit } \begin{cases} s_{i,\ell} = a_1 + i \Delta_\ell t \text{ und } \Delta_\ell t = \frac{b_1 - a_1}{\ell}, \\ t_{j,\ell} = a_2 + j \Delta_\ell s \text{ und } \Delta_\ell s = \frac{b_2 - a_2}{\ell}, \end{cases}$$

und approximiert den Flächeninhalt von  $\Phi(R)$  durch

$$\begin{aligned} &\lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{i,j=0}^{\ell-1} \sqrt{\det((\Phi(s_{i+1,\ell}, t_{j,\ell}) - \Phi(s_{i,\ell}, t_{j,\ell})) \cdot (\Phi(s_{i,\ell}, t_{j+1,\ell}) - \Phi(s_{i,\ell}, t_{j,\ell})))} = \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{i,j=0}^{\ell-1} \sqrt{\det \left( \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s_{i,\ell}, t_{j,\ell}) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}(s_{i,\ell}, t_{j,\ell}) \right)}_{i,j} (1 + \mathcal{O}(1)) \Delta_\ell t \Delta_\ell s = \\ &= \int_R \sqrt{\det \left( \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s, t) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}(s, t) \right)}_{i,j} d(s, t) + \lim_{\substack{\Delta t_{i,\ell} \rightarrow 0 \\ \Delta s_{j,\ell} \rightarrow 0}} \mathcal{O}(1) = \\ &= \int_R \sqrt{\det((\partial_i \Phi \cdot \partial_j \Phi)_{ij})} (y) dy. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Wir verallgemeinern diese Formel für Parametrisierungen, die nicht unbedingt von einem Rechteck ausgehen und setzen:



**Definition 10.12** Für eine stetig differenzierbare zweidimensionale Kurve (auch Fläche genannt)  $x : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  definieren wir den Flächeninhalt durch

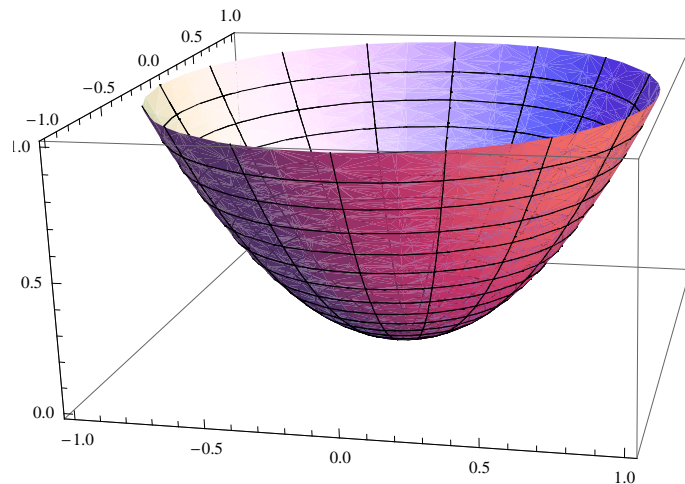
$$\text{Vol}_2^{(n)}(x) = \int_D \sqrt{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \end{pmatrix}} d(t, s).$$

**Bemerkung 10.12.1** Wenn wir  $n = 2$  setzen, sollte der Transformationssatz aus dem letzten Kapitel erscheinen. Das stimmt sogar, denn dann gilt

$$\begin{aligned} & \sqrt{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \end{pmatrix}} = \\ &= \sqrt{\det \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial t} \\ \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_1}{\partial s} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial s} \end{pmatrix} \right)} = \\ &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial t} \\ \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_1}{\partial s} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial s} \end{pmatrix}} = \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial t} \\ \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} \end{pmatrix} \right| \end{aligned}$$

und wir erhalten die bekannte Jacobi-Determinante.

**Beispiel 10.13** Das Paraboloid  $z = x^2 + y^2$  abgeschnitten bei  $z = 1$ . Man beschreibt es zum Beispiel durch  $k : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $k(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ .



Weil

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial k}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix},$$

hat man

$$\text{Vol}_2^{(3)}(k) = \int_{B_1(0)} \sqrt{\det \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} \end{pmatrix}} d(x, y) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{B_1(0)} \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1+4x^2 & 4xy \\ 4xy & 1+4y^2 \end{pmatrix}} d(x, y) = \\
&= \int_{B_1(0)} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} d(x, y) = \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sqrt{4r^2 + 1} r d\varphi dr = \\
&= 2\pi \left[ \frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{6} \pi (5\sqrt{5} - 1).
\end{aligned}$$

**Beispiel 10.14** Die obere Hälfte der Sphäre  $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| = 1\}$  wird flach gemacht durch

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2).$$

Man findet  $\Phi^{inv}(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2 - y_3})$  und eine zugehörige Parametrisierung der oberen Hälfte der Sphäre ist  $k: B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definiert durch

$$k(y_1, y_2) := \Phi^{inv}(y_1, y_2, 0) = \left( y_1, y_2, \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2} \right).$$

Berechnen wir den Transformationsfaktor mit dem Kreuzprodukt:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial k}{\partial y_1}(y_1, y_2) \times \frac{\partial k}{\partial y_2}(y_1, y_2) \right| &= \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-y_1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-y_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{-y_1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} \\ \frac{y_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \right| \\
&= \sqrt{\frac{y_1^2}{1-y_1^2-y_2^2} + \frac{y_2^2}{1-y_1^2-y_2^2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}.
\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt wird

$$\int_{y_1^2+y_2^2 \leq 1} \frac{1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} dy = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr d\varphi = 2\pi \left[ -\sqrt{1-r^2} \right]_0^1 = 2\pi.$$

**Beispiel 10.15** Die Sphäre  $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| = 1\}$  kann man parametrisieren durch

$$s(\varphi, \psi) = (\cos \varphi \sin \psi, \sin \varphi \sin \psi, \cos \psi)$$

mit  $\varphi \in [0, 2\pi)$  und  $\psi \in [0, \pi)$ . Man findet mit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s}{\partial \varphi} &= (-\sin \varphi \sin \psi, \cos \varphi \sin \psi, 0), \\
\frac{\partial s}{\partial \psi} &= (\cos \varphi \cos \psi, \sin \varphi \cos \psi, -\sin \psi),
\end{aligned}$$

dass

$$\begin{aligned}
\text{Vol}_2^{(3)}(s) &= \int_{[0, 2\pi) \times [0, \pi)} \sqrt{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial s}{\partial \varphi} & \frac{\partial s}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial s}{\partial \psi} \\ \frac{\partial s}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial s}{\partial \varphi} & \frac{\partial s}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial s}{\partial \psi} \end{pmatrix}} d(\varphi, \psi) = \\
&= \int_{[0, 2\pi) \times [0, \pi)} \sqrt{\det \begin{pmatrix} (\sin \psi)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} d(\varphi, \psi) = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \psi d\psi d\varphi = 2\pi [-\cos \psi]_0^\pi = 4\pi.
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis hat man erwartet.

## 10.3 Parallelepipeden in höheren Dimensionen

Wenn man ein  $m$ -Bein  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$  in  $\mathbb{R}^n$  hat, dann möchte man den  $m$ -dimensionalen Hyperflächeninhalt des Parallelepipeds

$$P = \{t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \dots + t_m\alpha_m; 0 \leq t_i \leq 1 \text{ mit } 1 \leq i \leq m\} \quad (10.5)$$

definieren. Dies kann man, wenn man zusätzlich Einheitsvektoren  $u_1, \dots, u_{n-m} \in \mathbb{R}^n$  festlegt, für die gilt, dass

$$\begin{cases} \alpha_i \cdot u_j = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq m \text{ und } 1 \leq j \leq n-m, \\ u_i \cdot u_j = 0 \text{ für } i \neq j. \end{cases} \quad (10.6)$$

Weil das Lebesgue-Maß rotationsinvariant ist und außerdem gilt, dass  $\lambda_{(n)} = \lambda_{(m)} \otimes \lambda_{(n-m)}$ , findet man

$$\text{Vol}_m^{(n)}(P) = \text{Vol}_n^{(n)}(\tilde{P}),$$

für

$$\tilde{P} = \{t_1\alpha_1 + \dots + t_m\alpha_m + t_{m+1}u_1 + \dots + t_n u_{n-m}; 0 \leq t_i \leq 1 \text{ mit } 1 \leq i \leq n\}.$$

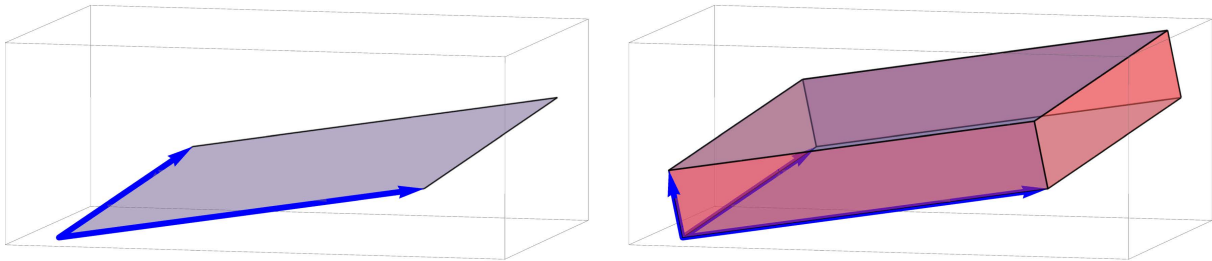


Abbildung 10.5: Der Flächeninhalt des linken Parallelogramms zum Zweibein  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  gleicht dem Volumen des rechten Parallelepipeds zum Dreibein  $\{\alpha_1, \alpha_2, u_1\}$ .

Wenn wir

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_m \\ | & & | \end{pmatrix} \text{ und } U = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_{n-m} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

schreiben, also die Vektoren als Spalten dieser Matrizen, dann folgt aus (10.6), dass  $A^T U = O$  und  $U^T U = I$ ;  $O$  ist die  $(n-m) \times m$ -Nullmatrix und  $I$  die  $(n-m) \times (n-m)$ -Einheitsmatrix. Wir folgern:

$$\begin{aligned} \text{Vol}_n^{(n)}(\tilde{P}) &= |\det(A \ U)| = \sqrt{\det \begin{pmatrix} A^T \\ U^T \end{pmatrix} \det(A \ U)} \\ &= \sqrt{\det \left( \begin{pmatrix} A^T \\ U^T \end{pmatrix} (A \ U) \right)} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} A^T A & A^T U \\ U^T A & U^T U \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} A^T A & O \\ O & I \end{pmatrix}} = \sqrt{\det(A^T A)} = \sqrt{\det((\alpha_i \cdot \alpha_j)_{ij})}. \end{aligned}$$

**Lemma 10.16** Sei  $P$  definiert in (10.5). Dann gilt

$$\text{Vol}_m^{(n)}(P) = \sqrt{\det((\alpha_i \cdot \alpha_j)_{ij})}$$

mit  $(\alpha_i \cdot \alpha_j)_{ij}$  die  $m \times m$ -Matrix der Skalarprodukte des  $m$ -Beins zu  $P$ .

## 10.4 Integral über eine Mannigfaltigkeit

Bei einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit werden Integrale über diese Mannigfaltigkeit durch Approximation mit Polygonzügen definiert. Bei höher-dimensionalen Mannigfaltigkeiten werden Integrale definiert durch Approximation mit Hilfe von Parallelepipeden.

Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  parametrisiert durch  $y \mapsto \Phi(y) : R \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  mit

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m].$$

Man zerlegt  $R$  in jede Richtung in  $\ell$  Scheiben

$$R = \bigcup_{\substack{k_i=0 \\ 1 \leq i \leq m}}^{\ell-1} [a_{1,k_1}, a_{1,k_1+1}] \times \cdots \times [a_{m,k_m}, a_{m,k_m+1}]$$

mit  $\Delta y_i = \frac{b_i - a_i}{\ell}$  und  $a_{i,k} = a_i + k \Delta y_i$ . Wir kürzen die Notation nochmals und setzen für  $\kappa \in \mathbb{N}^m$

$$a_\kappa = (a_{1,\kappa_1}, a_{2,\kappa_2}, \dots, a_{m,\kappa_m}).$$

Man approximiert das Integral ähnlich wie in (10.4) durch

$$\begin{aligned} & \int_M f(x) dV_m = \\ \lim_{\ell \rightarrow \infty} & \sum_{\substack{k_i=0 \\ 1 \leq i \leq m}}^{\ell-1} f(\Phi(a_\kappa)) \sqrt{\det \left( \left( \left( \Phi(a_{\kappa+e_i}) - \Phi(a_\kappa) \right) \cdot \left( \Phi(a_{\kappa+e_j}) - \Phi(a_\kappa) \right) \right)_{ij} \right)} = \\ & = \int_D (f \circ \Phi)(y) \sqrt{\det \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(y) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y_j}(y) \right)_{i,j}} dy + \lim_{\ell \rightarrow \infty} o(1) = \\ & = \int_D (f \circ \Phi)(y) \sqrt{\det \left( (\partial_i \Phi \cdot \partial_j \Phi)_{ij} \right)(y)} dy. \end{aligned}$$

Wir legen dieses Resultat mal fest in einer Definition bei der wir allgemeinere Gebiete zulassen:

**Definition 10.17** Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$ , die man mit  $D \subset \mathbb{R}^m$  offen und der  $C^1$ -Funktion  $\Phi : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  eindeutig beschreiben kann:

$$M = \Phi(D) := \{x = \Phi(y) \in \mathbb{R}^n; y \in D \subset \mathbb{R}^m\}.$$

- Die Funktion  $\Phi$  heißt eine **Parametrisierung** von  $M$ .
- Das **Integral** von  $f$  über  $M$  definiert man durch

$$\int_M f(x) dV_m := \int_D (f \circ \Phi)(y) \sqrt{\det \left( (\partial_i \Phi \cdot \partial_j \Phi)_{ij} \right)(y)} dy. \quad (10.7)$$

- Die Matrix  $(\partial_i \Phi(y) \cdot \partial_j \Phi(y))_{ij}$  nennt man die (**erste**) **Fundamentalmatrix** zu der Parametrisierung  $\Phi$  an der Stelle  $p = \Phi(y)$ .

**Bemerkung 10.17.1** Die Matrix  $(\partial_i \Phi(y) \cdot \partial_j \Phi(y))_{ij}$  ist eine  $m \times m$ -Matrix; die Vektoren  $\partial_i \Phi(y)$  liegen in  $\mathbb{R}^n$  mit  $n \geq m$ . Der Faktor mit Wurzel und Determinant ist stetig in  $D$ . Damit die rechte Seite in (10.7) als  $m$ -dimensionales Integral definiert ist, soll der Integrand selbstverständlich integrierbar über  $D$  sein.

**Bemerkung 10.17.2** Eine Mannigfaltigkeit, die man nicht mit einer Parametrisierung  $\Phi$  beschreiben kann, teilt man auf in Teilmannigfaltigkeiten, die mit einer Funktion zu beschreiben sind und addiert diese Integrale für  $\int_M f(x) dV_m$ . Bemerke, dass  $m - 1$ -dimensionale Ränder Nullmengen in  $\mathbb{R}^m$  sind und nicht am Wert des  $m$ -dimensionalen Integrals beitragen.

**Bemerkung 10.17.3** Wenn  $m = n$ , dann ist man zurück bei einer Transformation in  $\mathbb{R}^n$  und sollte die Formel in (10.7) mit der aus (9.4) übereinstimmen. Das passt auch, denn nun laufen  $i$  und  $j$  von 1 bis  $n = m$  und gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{\det \left( (\partial_i \Phi \cdot \partial_j \Phi)_{ij} \right) (y)} &= \sqrt{\det \left( (\Phi'(y))^T (\Phi'(y)) \right)} \\ &= \sqrt{\det \left( (\Phi'(y))^T \right) \det (\Phi'(y))} = |\det (\Phi'(y))|. \end{aligned}$$

**Bemerkung 10.17.4** Man soll noch zeigen, dass diese Definition nicht von der Parametrisierung abhängt. Wenn man zwei verschiedene Parametrisierungen  $k$  und  $h$  hat, für die es ein Diffeomorphismus  $\Psi$  gibt derart, dass

$$h = k \circ \Psi,$$

so folgt das gewünschte Ergebnis aus dem Transformationssatz. Denn an der Stelle  $y$  gilt:

$$\begin{aligned} \det \left( (\partial_i h \cdot \partial_j h)_{ij} \right)_{|_y} &= \det \left( (\nabla h)^T (\nabla h) \right)_{|_y} = \\ &= \det \left( \left( \nabla (k \circ \Psi) \right)^T \left( \nabla (k \circ \Psi) \right) \right)_{|_y} = \\ &\quad \text{(wegen der Kettenregel)} \\ &= \det \left( \left( (\nabla k) \circ \Psi \right)^T \left( (\nabla k) \circ \Psi \right) \right)_{|_y} = \\ \text{(denn für Matrizen gilt } (AB)^T &= B^T A^T \text{ und } (AB)C = A(BC) \text{ )} \\ &= \det \left( (\Phi')^T \left( (\nabla k) \circ \Psi \right)^T \left( (\nabla k) \circ \Psi \right) \Psi' \right)_{|_y} = \\ \text{(für quadratische Matrizen gilt } \det (AB) &= \det (A) \det (B) \text{ )} \\ &= \det \left( (\Psi')^T \right)_{|_y} \det \left( \left( (\nabla k) \circ \Psi \right)^T \left( (\nabla k) \circ \Psi \right) \right)_{|_y} \det (\Psi')_{|_y} = \\ &= (\det (\Psi'(y)))^2 \det \left( (\partial_i k \cdot \partial_j k)_{ij} \right)_{|_{\Phi(y)}}. \end{aligned}$$

Weil

$$\sqrt{\det \left( (\partial_i \tilde{k} \cdot \partial_j \tilde{k})_{ij} \right)_{|_y}} = |\det (\Psi'(y))| \sqrt{\det \left( (\partial_i k \cdot \partial_j k)_{ij} \right)_{|_{\Phi(y)}}}$$

folgt der Term  $|\det (\Psi'(y))|$ , welcher nach dem Transformationssatz die beiden Integrale übereinstimmen lässt. Für beliebige  $C^1$ -Parametrisierungen  $h$  und  $k$  von  $M$  ist die Funktion  $\Psi$  wohldefiniert durch

$$\Psi = k^{inv} \circ h$$

aber nicht unbedingt ein Diffeomorphismus.



# Analysis 3, Woche 11

## Mannigfaltigkeiten II



### 11.1 Immersionen

**Definition 11.1** Sei  $m \leq n \in \mathbb{N}$  und  $X \subset \mathbb{R}^m$  offen. Eine Abbildung  $f \in C^1(X; \mathbb{R}^n)$  heißt **Immersion**, wenn für jedes  $x \in X$  die Matrix  $\nabla f(x)$  injektiv ist.

**Bemerkung 11.1.1** Man hat

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}$$

und  $\nabla f(x) \in M^{n \times m}$ . Man kann statt  $\nabla f$  auch  $f'$  schreiben. Übrigens, wenn eine Matrix in  $M^{n \times m}$  injektiv ist, dann folgt  $m \leq n$ .

Parametrisierungen von Mannigfaltigkeiten sind lokal oft Immersionen. Eine genaue Aussage finden Sie im nächsten Theorem.

**Theorem 11.2** Sei  $X \subset \mathbb{R}^m$  offen und sei  $f \in C^k(X; \mathbb{R}^n)$  mit  $k \geq 1$  eine Immersion. Dann existiert für jedes  $x \in X$  eine Umgebung  $U_x \subset \mathbb{R}^m$  derart, dass  $f(U_x)$  eine  $m$ -dimensionale  $C^k$ -Mannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  ist.

**Beweis.** Sei  $x_0 \in X$  und setze  $z_0 = f(x_0)$ . Ohne Verlust der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass die ersten  $m$  Zeilen von  $\nabla f(x_0)$  eine injektive Matrix liefern:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die Abbildung  $g \in C^1(X \times \mathbb{R}^{n-m}; \mathbb{R}^n)$ , definiert für  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$  und  $y \in \mathbb{R}^{n-m}$  durch

$$g(x, y) = f(x) + (0, y).$$

Es folgt

$$\nabla g(x_0, 0) = \begin{pmatrix} M & O \\ A & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

und  $\det(\nabla g(x_0, 0)) = \det(M) \neq 0$ . Das Theorem über Umkehrfunktionen liefert offene Umgebungen  $U_{(x_0,0)}$  in  $X \times \mathbb{R}^{n-m}$  und  $U_{z_0}$  in  $\mathbb{R}^n$  und eine Umkehrfunktion  $g^{\text{invers}} : U_{z_0} \rightarrow U_{(x_0,0)}$ . Insbesondere gilt  $g^{\text{invers}}(U_{z_0} \cap f(U_{x_0})) \subset X \times \{0, \dots, 0\}$ .

Wenn  $f \in C^k$  gilt, dann folgt  $g \in C^k$  und weil  $g^{\text{invers}} \in C^1$ , folgt aus

$$\nabla(g^{\text{invers}}) = (\nabla g)^{-1} \circ g^{\text{invers}}$$

die Existenz der höheren Ableitungen bis  $C^k$ . ■

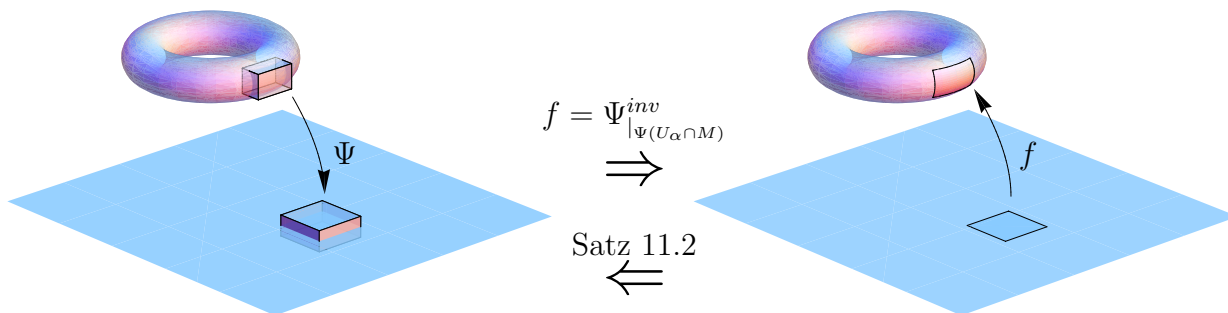


Abbildung 11.1: Zu der lokalen Definition einer Mannigfaltigkeit: links mit Hilfe eines Diffeomorphismus und rechts mit einer Immersion.

**Bemerkung 11.2.1** Dieses Theorem bedeutet nicht, dass  $f(X)$  eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit ist. Es sagt nur aus, dass  $f(U_x)$  (lokal) eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit ist. Global können Selbstdurchschneidungen auftreten. Siehe das nächste Beispiel.

**Beispiel 11.3** Für  $a > 0$  liefern die Abbildungen  $f_a : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$f_a(x) = \begin{pmatrix} (1 + a \cos x) \cos x \\ (1 + a \cos x) \sin x \end{pmatrix}$$

die sogenannten Limaçons von Pascal. Sie werden auch Pascalsche Schnecken genannt.

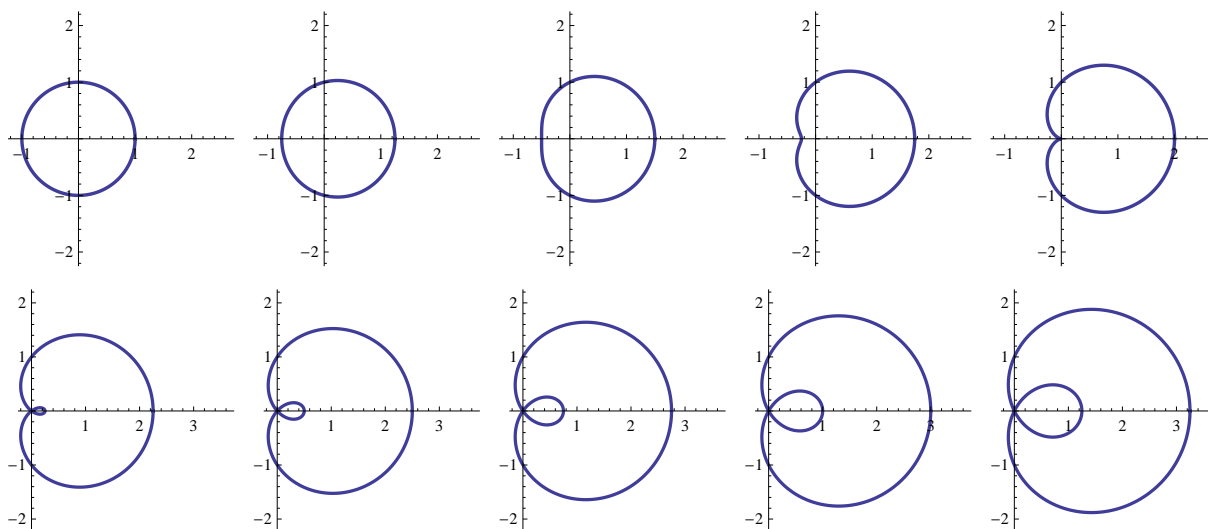


Abbildung 11.2: Die Limaçon von Pascal mit  $a \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \dots, \frac{9}{4}\}$ . Für  $a = 1$  ist  $f_a$  keine Immersion.

Weil

$$\nabla f_a(x) = \begin{pmatrix} -(1 + 2a \cos x) \sin x \\ -a + (1 + 2a \cos x) \cos x \end{pmatrix}$$



folgt  $\|\nabla f_a(x)\| = 0$  nur, wenn  $\sin x = 0$ . Denn wenn  $1 + 2a \cos x = 0$ , ist die zweite Komponente nur dann auch gleich 0, wenn  $a = 0$  gilt, und wir haben einen Widerspruch. Also muss  $\sin x = 0$  gelten, und das heißt  $x = k\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt  $\cos x = (-1)^k$  und die zweite Komponente ist 0, wenn

$$-a + (-1)^k + 2a = 0.$$

Weil  $a$  nicht negativ ist, folgt dass  $k$  ungerade ist und  $a = 1$ . Das heißt, für  $a \neq 1$  ist  $f_a$  eine Immersion und  $f_a(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  ist für genügend kleines  $\varepsilon$  eine Mannigfaltigkeit. Für  $a \in [0, 1)$  ist  $f_a(\mathbb{R})$  sogar eine Mannigfaltigkeit. Für  $a > 1$  gibt es Selbstdurchschneidungen.

**Beispiel 11.4** Die Sphäre  $S^2$  in  $\mathbb{R}^3$ :

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = 1\}$$

kann man, mit Ausnahme von  $(0, 0, 1)$ , mit Hilfe einer stereographischen Projektion beschreiben:

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x_1}{1-x_3} \\ \frac{2x_2}{1-x_3} \\ x_3 \end{pmatrix},$$

oder genauer gesagt, mit der Inverse zu dieser Projektion. Man vergleiche dazu die ähnlichen Dreiecke

$$\Delta_1 = [(0, 1), (x_1, x_3), (0, x_3)] \quad \text{und} \quad \Delta_2 = [(0, 1), (y_1, 0), (0, -1)]$$

und findet so  $\frac{y_1}{2} = \frac{x_1}{1-x_3}$ . Auch findet man so  $\frac{y_2}{2} = \frac{x_2}{1-x_3}$ .

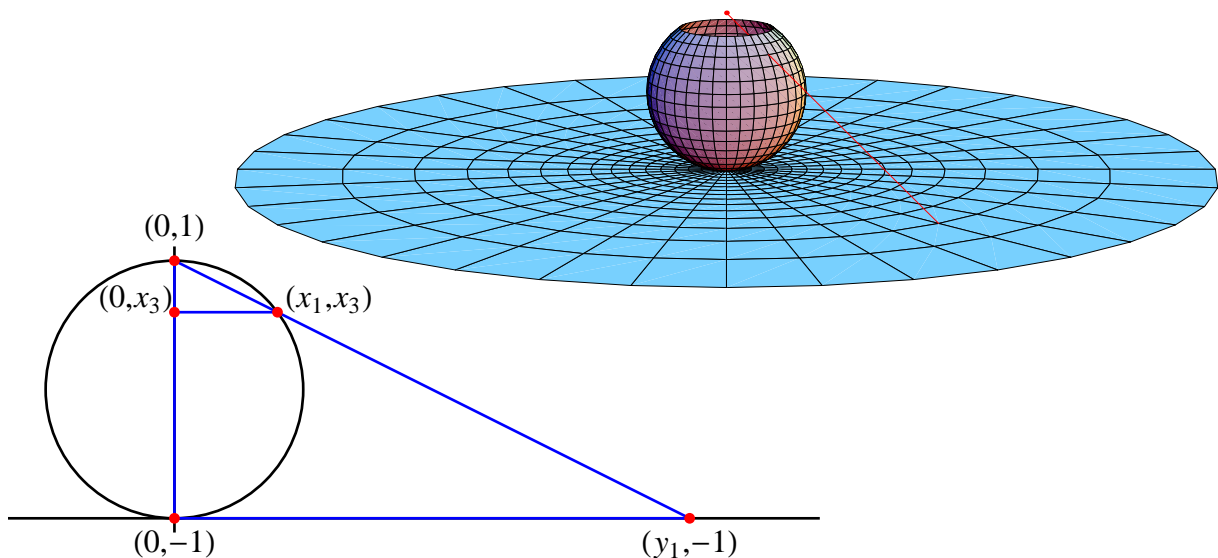


Abbildung 11.3: Die stereographische Projektion von dem Nordpol aus auf die tragende Ebene.

Diese Abbildung  $\varphi$  ist  $C^1$  für  $x_3 < 1$  und  $\psi = (\varphi|_{S^2})^{\text{invers}}$  soll eine Immersion sein. Man kann  $\psi$  wie folgt berechnen:

Aus  $\frac{y_1}{2} = \frac{x_1}{1-x_3}$ ,  $\frac{y_2}{2} = \frac{x_2}{1-x_3}$  und  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  folgt

$$y_1^2 + y_2^2 = 4 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_3)^2} = 4 \frac{1-x_3^2}{(1-x_3)^2} = 4 \frac{1+x_3}{1-x_3} = \frac{8}{1-x_3} - 4$$

und  $x_3 = 1 - \frac{8}{4+y_1^2+y_2^2}$ . Auch folgt

$$x_1 = \frac{1}{2} (1 - x_3) y_1 = \frac{4y_1}{4 + y_1^2 + y_2^2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{4y_2}{4 + y_1^2 + y_2^2}.$$

Also hat man

$$\psi \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4y_1}{4+y_1^2+y_2^2} \\ \frac{4y_2}{4+y_1^2+y_2^2} \\ 1 - \frac{8}{4+y_1^2+y_2^2} \end{pmatrix}.$$

Man kann direkt kontrollieren, dass  $\psi$  eine Immersion ist, denn es gilt

$$\nabla\psi = \begin{pmatrix} \frac{16-4y_1^2+4y_2^2}{(4+y_1^2+y_2^2)^2} & -\frac{8y_1y_2}{(4+y_1^2+y_2^2)^2} \\ -\frac{8y_1y_2}{(4+y_1^2+y_2^2)^2} & \frac{16+4y_1^2-4y_2^2}{(4+y_1^2+y_2^2)^2} \\ \frac{16y_1}{(4+y_1^2+y_2^2)^2} & \frac{16y_2}{(4+y_1^2+y_2^2)^2} \end{pmatrix}$$

und dividiert man durch den Faktor  $\frac{4}{(4+y_1^2+y_2^2)^2}$ , so findet man

$$\begin{pmatrix} 4 - y_1^2 + y_2^2 & -2y_1y_2 \\ -2y_1y_2 & 4 + y_1^2 - y_2^2 \\ 4y_1 & 4y_2 \end{pmatrix}.$$

Für  $y_1 \neq 0$  folgt

$$\det \begin{pmatrix} -2y_1y_2 & 4 + y_1^2 - y_2^2 \\ 4y_1 & 4y_2 \end{pmatrix} = -4y_1 (4 + y_1^2 + y_2^2) \neq 0,$$

für  $y_2 \neq 0$  folgt

$$\det \begin{pmatrix} 4 - y_1^2 + y_2^2 & -2y_1y_2 \\ 4y_1 & 4y_2 \end{pmatrix} = 4y_2 (y_1^2 + y_2^2 + 4) \neq 0$$

und für  $y_1^2 + y_2^2 \neq 4$  folgt

$$\det \begin{pmatrix} 4 - y_1^2 + y_2^2 & -2y_1y_2 \\ -2y_1y_2 & 4 + y_1^2 - y_2^2 \end{pmatrix} = (y_1^2 + y_2^2 - 4)^2 \neq 0.$$

Weil diese drei Ausnahmen einen leeren Durchschnitt haben ist  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{0, 0, 1\}$  eine Immersion.

**Beispiel 11.5** Sei  $0 < r < R$ . Die  $C^\infty$ -Abbildung  $h_{R,r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$h_{a,r}(s, t) = \begin{pmatrix} (R + r \cos t) \cos s \\ (R + r \cos t) \sin s \\ r \sin t \end{pmatrix}$$

liefert für alle  $0 < r < R$  einen Torus. Siehe Abbildung 11.4.

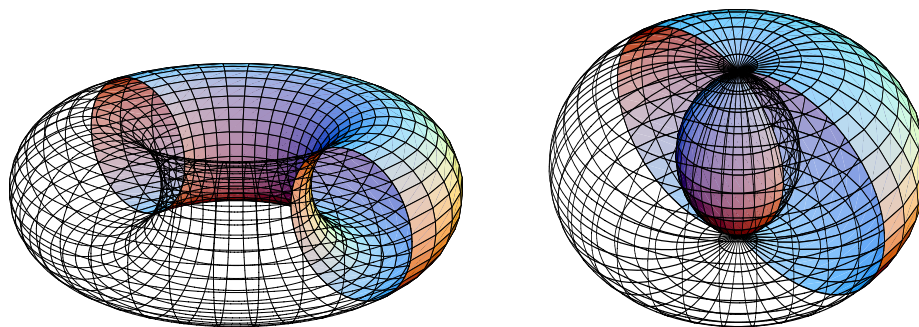


Abbildung 11.4: Graphische Darstellungen zu  $h_{2,1}$  und  $h_{1,2}$ .

## 11.2 Lokale Karten und Parametrisierungen

Nicht alle Mannigfaltigkeiten lassen sich so leicht durch eine Parametrisierung definieren. Auch wollen wir abstraktere Definitionen von Mannigfaltigkeiten zulassen, die nicht von vornherein in einem euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$  eingebettet sind.

**Beispiel 11.6** Wir definieren  $M = [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ , wobei wir wie folgt Randpunkte identifizieren:

$$(0, t) = (2\pi, -t) \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

Versucht man  $M$  als Oberfläche in  $\mathbb{R}^3$  darzustellen, findet man das Möbiusband. Ein Streifen von  $M$ , das heißt  $(s, t) \in M$  mit  $|t| < t_0$ , läßt sich in  $\mathbb{R}^3$  als ein Band darstellen, das man am Ende verdreht zusammengeklebt hat.

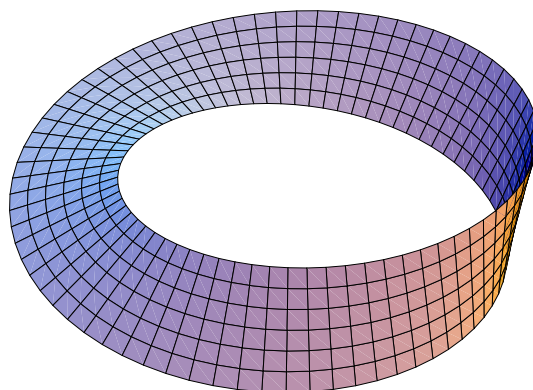


Abbildung 11.5: Ein Streifen aus dem Möbiusband. Das Möbiusband ist nicht **orientierbar**: es gibt keinen stetigen Normalenvektor auf dem Möbiusband.

**Definition 11.7** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Man nennt

$$\{(\varphi_\alpha, U_\alpha); \alpha \in A\} \text{ mit } \varphi_\alpha \in C^1(U_\alpha; \mathbb{R}^m) \text{ und } U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

einen **Atlas** für  $M$ , wenn  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \supset M$ , das heißt,  $M$  wird überdeckt von den  $U_\alpha$ , und wenn für jedes  $\alpha \in A$  gilt:

- $\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap M}$  ist injektiv;
- $(\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap M})^{\text{invers}} : V_\alpha \rightarrow M$  mit  $V_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha \cap M)$  ist eine Immersion.

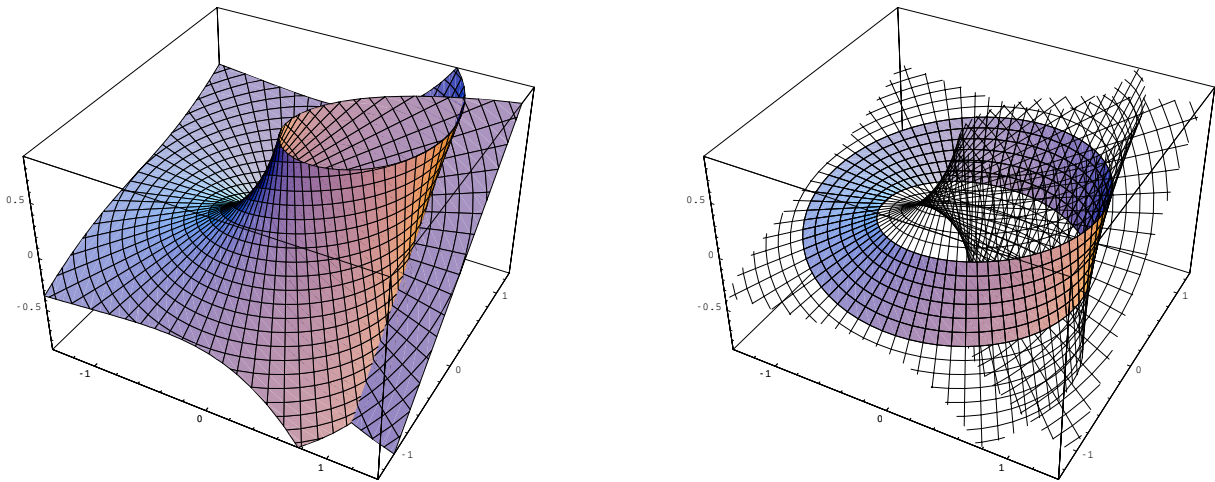


Abbildung 11.6: Wenn man mehr vom Möbiusband zeigt, wird es unübersichtlich. Hier findet man das Bild, wenn man das Band in Abbildung 11.5 fortsetzt innerhalb eines Würfels um  $O$ .

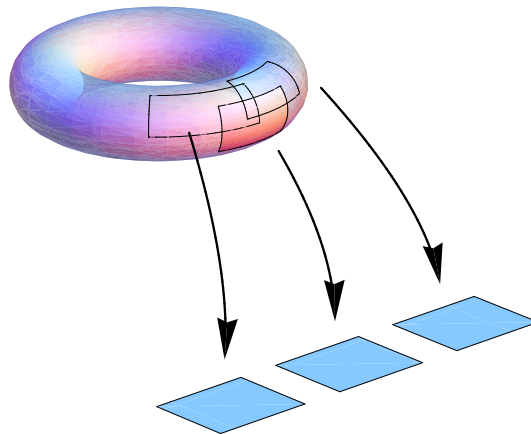


Abbildung 11.7: Einige der Funktionen  $\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap M}$ . Die Funktion  $\varphi_\alpha$  ist definiert auf  $U_\alpha$ .

**Bemerkung 11.7.1**  $\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap M}$  ist die Einschränkung von  $\varphi_\alpha$  auf  $U_\alpha \cap M$ , das heißt,  $\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap M} : U_\alpha \cap M \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist definiert durch  $\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap M}(x) = \varphi_\alpha(x)$  für  $x \in U_\alpha \cap M$ .

**Bemerkung 11.7.2** Das Paar  $(\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap M}, U_\alpha \cap M)$  nennt man **Karte**.

Die Funktion  $(\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap M})^{\text{invers}}$  ist eine lokale Parametrisierung.

**Bemerkung 11.7.3** Um die ganze Mannigfaltigkeit betrachten zu können, reicht eine Karte meistens nicht aus. Denn wandert man zum Beispiel über den Torus, dann muss man wahrscheinlich gelegentlich die Karte wechseln. Eine Mannigfaltigkeit kann übrigens auch durch mehrere Atlanten beschrieben werden.

**Bemerkung 11.7.4** Die Definition von Mannigfaltigkeit sagt uns, dass zu jedem  $x \in M$  lokal eine Karte existiert.

**Beispiel 11.8** Die Sphäre  $S^2$  in  $\mathbb{R}^3$ :

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = 1\}$$

kann man mit zwei Karten beschreiben. Man nehme zum Beispiel für  $\varphi_1$  die stereographische Projektion von dem Nordpol aus auf die Fläche  $x_3 = -1$  und für  $\varphi_2$  die stereographische Projektion von dem Südpol aus auf die Fläche  $x_3 = 1$ .

Oder man nimmt sphärische Koordinaten und verwendet, siehe Abbildung 11.8

- für  $\vartheta \in [0, \pi)$ :

$$(\cos(\varphi) \sin(\vartheta), \sin(\varphi) \sin(\vartheta), \cos(\vartheta)) \mapsto (\vartheta \cos(\varphi), \vartheta \sin(\varphi)),$$

- für  $\vartheta \in (0, \pi]$ :

$$(\cos(\varphi) \sin(\vartheta), \sin(\varphi) \sin(\vartheta), \cos(\vartheta)) \mapsto ((\pi - \vartheta) \cos(\varphi), (\pi - \vartheta) \sin(\varphi)).$$

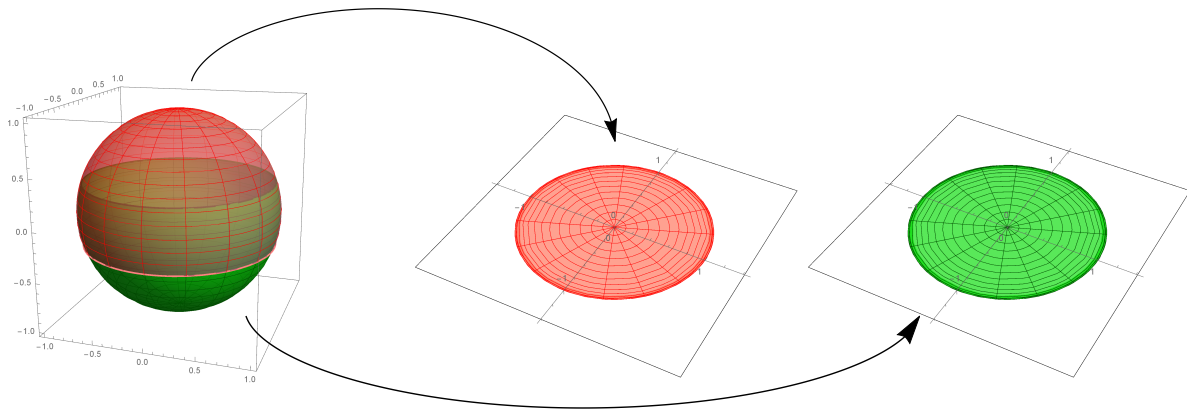


Abbildung 11.8: Zwei Karten reichen für  $\mathbb{S}^2$ .

## 11.3 Vektorfelder und Pfaffsche Formen

Wir wollen Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten definieren und benutzen können. Das heißt, wir wollen Vektorfelder definieren, die an jeder Stelle der Mannigfaltigkeit tangential zur Oberfläche zeigen. Wenn wir als Beispiel die  $n$ -dimensionale Sphäre  $S^n$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  betrachten, dann kann man in jedem Punkt  $p$  tangential einen Vektor in  $\mathbb{R}^{n+1}$  anhängen. Tangential bedeutet aber, dass man diese Vektoren nur wählen darf aus einem  $n$ -dimensionalen Unterraum von  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

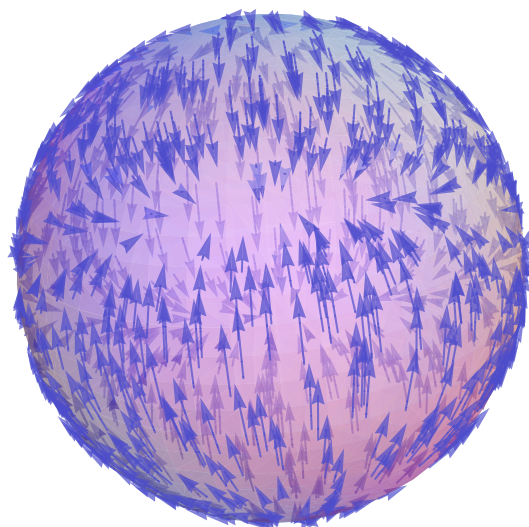


Abbildung 11.9: Ein Vektorfeld auf der Sphäre; die Vektoren sind tangential zu der Oberfläche.

### 11.3.1 Der Tangentialraum

**Definition 11.9** Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale  $C^1$ -Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  (mit  $m \leq n$ ) und sei  $p \in M$ . Sei  $\psi$  eine Immersion mit  $\psi(0) = p$ , die  $M$  lokal parametrisiert, und sei  $\mathcal{R}$  der Bildraum (Spaltenraum) von  $\nabla\psi(0)$ .

- Man nennt  $T_pM = (p, \mathcal{R})$  den **Tangentialraum** an  $M$  im Punkt  $p$ .
- Ein Element  $(p, v) \in T_pM$  nennt man **Tangentialvektor**.
- Die Vereinigung  $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$  nennt man das **Tangentialbündel** zu  $M$ .

$T_pM$  ist ein Vektorraum mit der folgenden Vektorraumstruktur:

$$s(p, v) + t(p, u) = (p, sv + tu) \text{ für } s, t \in \mathbb{R} \text{ und } u, v \in \mathcal{R}.$$

Das  $p$  steht nur da als Erinnerung, dass der Raum abhängt von  $p \in M$ . Der Raum  $T_pM$  ist ein  $m$ -dimensionaler Untervektorraum von  $T_p\mathbb{R}^n = (p, \mathbb{R}^n)$  und  $T_p\mathbb{R}^n$  hängt nicht von  $p$  ab.

**Bemerkung 11.9.1** Für jede Parametrisierung  $\psi$  von  $M$  in einer Umgebung von  $p \in M$ , die lokal eine Immersion ist, ist der Tangentialraum  $T_pM$  identisch.

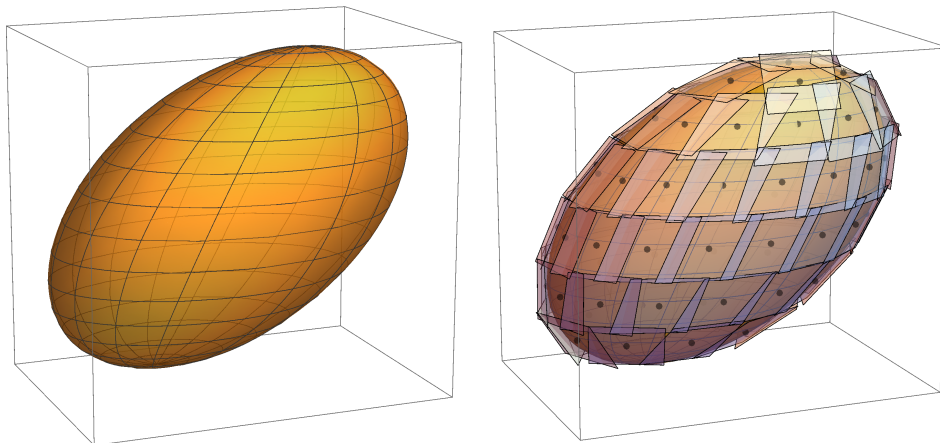


Abbildung 11.10: Eine Mannigfaltigkeit ohne und mit einigen Elementen aus dem Tangentialbündel.

**Definition 11.10** Eine  $m$ -dimensionale  $C^1$ -Mannigfaltigkeit  $M$  in  $\mathbb{R}^n$  heißt **orientierbar**, wenn es für jedes  $p \in M$  eine Basis  $\{(p, v_1), \dots, (p, v_m)\}$  für  $T_pM$  gibt, mit  $v_i$  für jedes  $i \in \{1, \dots, m\}$  stetig abhängig von  $p$ .

**Bemerkung 11.10.1** Wenn  $n = m + 1$  gilt, dann folgt aus dieser Definition, dass  $M$  orientierbar ist genau dann, wenn es einen stetigen Normalenvektor gibt auf  $M$ . Dies wurde für das Möbiusband verwendet.

**Beispiel 11.11** Wenn man bei einem endlichen Zylinder die beiden Enden mit gleicher Orientierung aneinander klebt, bekommt man einen Torus. Wenn man dies mit gegengesetzter Orientierung macht, dann bekommt man die sogenannte Kleinsche Flasche. In  $\mathbb{R}^3$

führt dies zu einer selbstdurchschneidenden Oberfläche, also formal keine Mannigfaltigkeit, aber in  $\mathbb{R}^4$  kann man so eine nicht-orientierbare Mannigfaltigkeit bekommen durch die Parametrisierung

$$p(s, t) = \begin{pmatrix} 4 \cos(t) + \cos(s) \cos(t/2) \\ 4 \sin(t) + \cos(s) \sin(t/2) \\ \sin(s) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Siehe Abbildung 11.11.

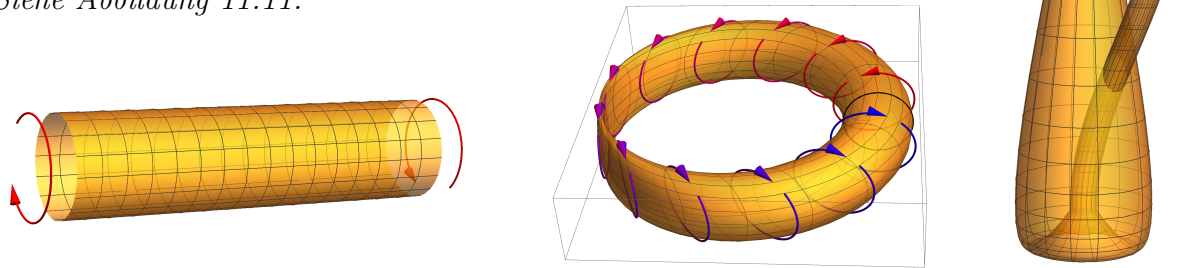


Abbildung 11.11: Der Zylinder, eine Darstellung der ersten drei Koordinaten von  $\{p(s, t); s, t \in \mathbb{R}\}$  und die Kleinsche Flasche

**Theorem 11.12** Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale  $C^1$ -Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  (mit  $m \leq n$ ) und sei  $p \in M$ .

- Für jede  $(p, v) \in T_p M$  gibt es eine Kurve  $\gamma \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon); \mathbb{R}^n)$  mit  $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subset M$ ,  $\gamma(0) = p$  und  $\gamma'(0) = v$ .
- Wenn es eine Kurve  $\gamma \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon); \mathbb{R}^n)$  gibt mit  $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subset M$  und  $\gamma(0) = p$ , dann gilt  $(p, \gamma'(0)) \in T_p M$ .

**Beweis.** Sei  $(\varphi_p, U_p)$  eine Karte. Wir dürfen annehmen, dass  $\varphi_p(p) = 0$ . Wir nehmen  $\psi := \left(\varphi_p|_{U_p \cap M}\right)^{\text{invers}} : \mathbb{R}^m \rightarrow M$ .

- Sei  $T_p M = (p, \mathcal{R})$ . Setzen wir  $\gamma(t) = \psi(t\xi)$  mit  $\xi \in \mathbb{R}^m$ . Es folgt, dass  $\gamma(0) = \psi(0) = p$  und  $\gamma'(0) = (\nabla\psi(0)) \xi$ . Weil  $\psi$  eine Immersion ist, ist  $(\nabla\psi(0)) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{R}$  bijektiv und wir können  $\xi \in \mathbb{R}^m$  finden mit  $(\nabla\psi(0)) \xi = v$ .
- Wenn es eine Kurve  $\gamma \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon); \mathbb{R}^n)$  gibt mit  $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subset M$  und  $\gamma(0) = p$ , dann gilt  $\psi(\varphi_p(\gamma(t))) = \gamma(t)$  und die Kettenregel liefert

$$\gamma'(0) = \nabla\psi(0) \left( \nabla\varphi_p(p) \gamma'(0) \right) \in \mathcal{R},$$

denn  $\nabla\psi(0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{R}$ .

■

### 11.3.2 Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten

Für Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten kommt man zur folgenden Definition.

**Definition 11.13** Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  (mit  $m \leq n$ ). Eine Abbildung  $\mathbf{v} : M \rightarrow TM$  mit  $\mathbf{v}(p) = (p, v(p)) \in T_p M$  nennt man **Vektorfeld** auf  $M$ .

### 11.3.3 Der Kotangententialraum

Wenn  $V$  ein Vektorraum ist, dann definiert man den dualen Vektorraum  $V^*$  als die Menge aller stetigen linearen Abbildungen  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Ist  $V$  endlich dimensional, dann ist jede lineare Abbildung stetig.

In dem Fall, dass  $V$  ein Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  ist mit  $\{b_1, \dots, b_m\}$  als eine Basis, dann kann man jedes Element  $L \in V^*$  definieren, indem man es festlegt auf die Basiselemente:

$$Lb_i = \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Für  $v = \sum_{i=1}^m c_i b_i$  folgt dann aus der Linearität

$$Lv = L\left(\sum_{i=1}^m c_i b_i\right) = \sum_{i=1}^m c_i Lb_i = \sum_{i=1}^m c_i \alpha_i.$$

Nimmt man das Standardskalarprodukt zu Hilfe, kann man  $L$  in Matrixform schreiben mit der Matrix zusammengestellt aus den Basisvektoren. Definieren wir

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad (11.1)$$

so findet man

$$L = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) (B^T B)^{-1} B^T. \quad (11.2)$$

Demn tatsächlich gilt so, dass

$$L\left(\sum_{i=1}^m c_i b_i\right) = L\left(B \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}\right) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) (B^T B)^{-1} B^T B \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m c_i \alpha_i$$

Man soll bemerken, dass die Unabhängigkeit von  $\{b_1, \dots, b_m\}$  impliziert, dass die  $m \times m$ -Matrix  $B^T B$  invertierbar ist, denn aus dieser Unabhängigkeit folgt die Injektivität von  $B$  und dann auch, dass  $B^T B$  positiv definit ist

$$x \cdot B^T B x = \|Vx\|^2 > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}.$$

Dann sind alle Eigenwerte von  $B^T B$  strikt positiv und es folgt  $\det(B^T B) > 0$ .

**Definition 11.14** Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale  $C^1$ -Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  und sei  $p \in M$ . Den Dualraum  $T_p^* M$  zu  $T_p M$  nennt man den **Kotangententialraum** an  $M$  im Punkt  $p$ .

Auch hier wird in der Notation die Stelle  $p$  mitgenommen. Wenn  $T_p M = (p, V)$ , dann setzt man  $T_p^* M = (p, V^*)$ .

**Definition 11.15** Ein Element  $(p, v) \in T_p^* M$  nennt man **Kotangententialvektor**.

Die Vereinigung  $T^* M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M$  nennt man das **Kotangententialbündel** zu  $M$ .

Wenn nun  $M$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  ist, dann sind  $T_p M$  und  $T_p^* M$  für jedes  $p \in M$  auch  $m$ -dimensional.



### 11.3.4 Die Pfaffschen Formen

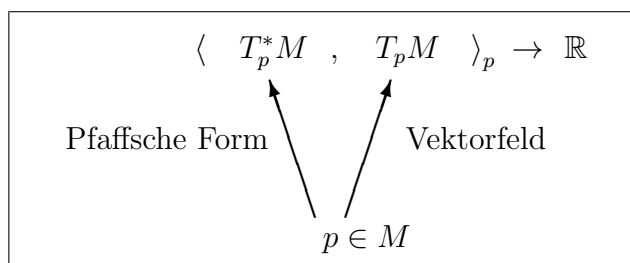
Nachdem wir das Kotangententialbündel definiert haben, folgen die Pfaffschen Formen.

**Definition 11.16** Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  (mit  $m \leq n$ ). Eine Abbildung  $\alpha : M \rightarrow T^*M$  mit  $\alpha(p) = (p, \alpha(p)) \in T_p^*M$  nennt man **Pfaffsche Form** auf  $M$ .

Eine Pfaffsche Form nennt man auch Differentialform von Grad 1.

## 11.4 Die Dualität zwischen Vektorfeldern und Pfaffschen Formen

Der Zusammenhang zwischen Tangentialraum, Kotangententialraum, Vektorfeld und Pfaffsche Form finden Sie erstmal in der nächsten Skizze.



Sei  $\psi : U_{x_0} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  eine lokale Parametrisierung. Schreiben wir  $\psi(x_0) = p \in M$ , dann findet man:

**Lemma 11.17** Eine Basis für  $T_pM$  ist  $\{b_i\}_{i=1}^m$ , oder genauer  $\{(p, b_i)\}_{i=1}^m$ , definiert durch

$$b_i = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) (x_0) \in \mathbb{R}^n.$$

Die duale Basis für  $T_p^*M$  ist dann  $\{(p, b_i^*)\}_{i=1}^m$ , wobei  $b_i^*$  definiert ist durch

$$\langle b_i^*, b_j \rangle_p = \delta_{ij}.$$

**Bemerkung 11.17.1** Auch hier ist  $\delta_{ij}$  der Kronecker Delta:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Die Dualität von Vektorfeldern und Pfaffschen Formen an der Stelle  $p$  wird bezeichnet mit

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p^*M \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}.$$

Es folgt aus (11.2), mit  $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$  der  $i$ -te Basisvektor in  $\mathbb{R}^m$  und (11.1), dass für  $w = Bx$  mit

$$B = \nabla \psi(x_0),$$

also gilt  $(p, w) \in T_pM$ , dass

$$\langle b_i^*, w \rangle_p = \mathbf{e}_i^T (B^T B)^{-1} B^T w.$$

Will man diese Dualität weiter untersuchen, dann ist es notwendig die Stetigkeit oder differenzierbare Abhängigkeit der Ortsvariablen ins Spiel zu bringen.

**Definition 11.18** Sei  $0 < q \leq k \in \mathbb{N}$  und sei  $M$  eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$ . Man sagt  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  liegt in  $C^q(M; \mathbb{R}^\ell)$ , wenn für jede lokale Parametrisierung  $\psi : U_x \rightarrow M$ , die eine Immersion ist, gilt  $f \circ \psi \in C^q(U_x; \mathbb{R}^\ell)$ .

**Notation 11.19** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Mannigfaltigkeit und  $k \in \mathbb{N}$ .

- Die Vektorfelder  $\mathbf{v} : M \rightarrow TM$  mit  $\mathbf{v}(p) = (p, v(p)) \in T_pM$  und  $p \mapsto v(p) \in C^k(M; \mathbb{R}^n)$  bezeichnet man mit  $\mathcal{V}^k(M)$ .
- Die Pfaffschen Formen  $\alpha : M \rightarrow T^*M$  mit  $\alpha(p) = (p, \alpha(p)) \in T_p^*M$  und  $p \mapsto \alpha(p) \in C^k(M; \mathbb{R}^n)$  bezeichnet man mit  $\Omega_k(M)$ .

**Bemerkung 11.19.1** Auf  $\mathcal{V}^q(M)$  und  $\Omega_q(M)$  kann man eine skalare Multiplikation mit  $C^q(M; \mathbb{R})$ -Funktionen definieren. Für  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^q(M)$ ,  $\alpha \in \Omega_q(M)$  und  $h \in C^q(M; \mathbb{R})$  setzt man

$$(h\mathbf{v})(p) = (p, h(p)v(p)) \quad \text{und} \quad (h\alpha)(p) = (p, h(p)\alpha(p)),$$

und findet  $h\mathbf{v} \in \mathcal{V}^q(M)$  und  $h\alpha \in \Omega_q(M)$ .

Auch hier haben sich eigene Notationen durchgesetzt. Sei  $\psi : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  eine lokale Parametrisierung mit  $\psi(0) = p$ , und sei  $\{e_1, \dots, e_m\}$  die Standardbasis für  $\mathbb{R}^m$ . Dann findet man

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \psi(0), \frac{\partial}{\partial x_2} \psi(0), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \psi(0) \right\}$$

als Basis für  $T_pM$ . Lässt man die lokale Parametrisierung weg und behält man nur  $\psi(0) = p$ , dann kann man verstehen, dass man oft

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} p, \frac{\partial}{\partial x_2} p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} p \right\} \quad (11.3)$$

als Basis für  $T_pM$  schreibt.

- Ein Tangentialvektor an der Stelle  $p$  wird dann eine Linearkombination der Basiselemente:

$$v(p) = f_1(p) \frac{\partial}{\partial x_1} p + \dots + f_m(p) \frac{\partial}{\partial x_m} p.$$

Für die zugehörige duale Basis für  $T_p^*M$  schreibt man

$$\{dx_1, \dots, dx_m\}. \quad (11.4)$$

- Eine Pfaffsche Form  $\alpha$  wird an der Stelle  $p$  dann beschrieben durch eine Linearkombination dieser Basiselemente:

$$\alpha(p) = g_1^*(p)dx_1 + \dots + g_m^*(p)dx_m.$$

Die Dualität zwischen Tangentialvektoren und Pfaffschen Formen wird dann wie folgt:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, v \rangle_p &= \left\langle g_1^*(p)dx_1 + \dots + g_m^*(p)dx_m, f_1(p) \frac{\partial}{\partial x_1} p + \dots + f_m(p) \frac{\partial}{\partial x_m} p \right\rangle_p \\ &= \sum_{i=1}^m g_i^*(p) f_i(p). \end{aligned}$$

# Analysis 3, Woche 12

## Multilineare Algebra



### 12.1 Antisymmetrische, multilineare Abbildungen

Die Determinante für  $n \times n$ -Matrizen kann man auch auffassen als Abbildung definiert auf  $n$  Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$ :

$$\det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_n \rightarrow \mathbb{R},$$

wenn man die Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  als Spaltenvektor schreibt:

$$\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) := \det \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

So betrachtet ist die Determinante linear in jede Komponente, das heißt, für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt

$$\vec{v}_i \mapsto \det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n) \text{ ist linear.}$$

Außerdem hat sie die folgende Eigenschaft: für  $1 \leq i < j \leq n$  gilt

$$\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_n) = -\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n).$$

Wir wollen Abbildungen mit solchen Eigenschaften näher betrachten.

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Dann definiert man  $V^*$  als den Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Allgemeiner kann man multilineare Abbildungen  $\omega : V \times V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$  definieren. Im Zusammenhang mit Mannigfaltigkeiten spielen insbesondere die **antisymmetrischen, multilinearen Abbildungen** eine wichtige Rolle.

**Definition 12.1** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{N}^+$ . Eine Abbildung

$$\omega : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k \times} \rightarrow \mathbb{R}$$

1. heißt **multilinear**, wenn für jedes  $i \in \{1, \dots, k\}$  und jeden  $v_j \in V$  mit  $j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$  die Abbildung

$$v_i \mapsto \omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

linear ist;

2. heißt **antisymmetrisch**, wenn für jedes  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $i \neq j$  und jeden  $v_\ell \in V$  mit  $\ell \in \{1, \dots, k\}$  gilt:

$$\begin{aligned} \omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_k) \\ = -\omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Das heißt, die Vertauschung zweier Vektoren in  $\omega$  liefert ein Minuszeichen.

So eine Abbildung  $\omega$  nennt man eine **äußere Form von Grad  $k$** . Die Menge aller **äußeren  $k$ -Formen** bezeichnet man mit  $\Lambda^k(V^*)$ .

**Bemerkung 12.1.1** Nehmen wir  $k = 1$ . Dann ist multilinear identisch mit linear und die Antisymmetrie wird eine leere Bedingung. Dies bedeutet, dass  $\Lambda^1(V^*) = V^*$ . Für  $k = 0$  setzt man  $\Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$ .

**Lemma 12.2** Definiert man Addition und Multiplikation mit Skalaren wie üblich. Für  $v_i \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  setzt man

$$\begin{aligned} (\omega_1 + \omega_2)(v_1, \dots, v_k) &= \omega_1(v_1, \dots, v_k) + \omega_2(v_1, \dots, v_k), \\ (\lambda\omega)(v_1, \dots, v_k) &= \lambda\omega(v_1, \dots, v_k), \end{aligned}$$

dann ist  $\Lambda^k(V^*)$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ .

**Beweis.** Direktes Ausschreiben zeigt die Multilinearität und die Antisymmetrie von  $\omega_1 + \omega_2$  und  $\lambda\omega$ , wenn  $\omega_1, \omega_2$  und  $\omega$  diese Eigenschaften haben. ■

**Beispiel 12.3** Sei  $V = \mathbb{R}^2$ . Dann kann man  $\omega \in \Lambda^1(V^*) = V^*$  darstellen durch

$$\omega(x) = a_1x_1 + a_2x_2 \text{ mit } a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Jede lineare Abbildung hat diese Form. Die Antisymmetriebedingung ist eine leere Bedingung bei einem Vektor  $x$ .

Wie ist  $\Lambda^2(V^*)$  für  $V = \mathbb{R}^2$ ? Wir nehmen  $x, y \in \mathbb{R}^2$ . Für  $\omega \in \Lambda^2(V^*)$  gilt wegen der Multilinearität, dass

$$\omega(x, y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2.$$

Wegen der Antisymmetrie folgt

$$a_{11} = \omega\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -\omega\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -a_{11},$$

also  $a_{11} = 0$  und ebenso  $a_{22} = 0$ . Mit

$$a_{12} = \omega\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -\omega\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -a_{21},$$

folgt  $a_{12} = -a_{21}$ . Das heißt

$$\omega(x, y) = a_{12}(x_1y_2 - a_{21}x_2y_1) = a_{12} \det(x, y).$$

**Beispiel 12.4** Sei  $V = \mathbb{R}^3$ . Die Abbildungen  $\omega \in \Lambda^1(V^*) = V^*$  werden dargestellt durch

$$\omega(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \text{ mit } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Für  $\omega \in \Lambda^2(V^*)$  wird durch die Multilinearität die folgende Vorschrift vorgegeben:

$$\omega(x, y) = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_iy_j.$$

Wie bei  $\mathbb{R}^2$  findet man  $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$  und  $a_{12} = -a_{21}$ ,  $a_{13} = -a_{31}$  und  $a_{23} = -a_{32}$ . Dies führt zu

$$\omega(x, y) = x^T A y$$

mit  $A \in M^{3 \times 3}(\mathbb{R})$  derart, dass  $A = -A^T$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Jede solche Abbildung und auch nur solch eine, erfüllt die Multilinearitätsbedingung und ist auch antisymmetrisch:

$$\omega(x, y) = x^T A y = (x^T A y)^T = y^T A^T x = -y^T A x.$$

Es folgt, dass  $\dim(\Lambda^2((\mathbb{R}^3)^*)) = 3$ .

Für  $\omega \in \Lambda^3(V^*)$  liefert die Multilinearität

$$\omega(x, y, z) = \sum_{i,j,k=1}^3 a_{ijk}x_iy_jz_k.$$

Auch hier folgt  $a_{iik} = a_{iki} = a_{kii} = 0$  für alle  $i, k \in \{1, 2, 3\}$  und sonst

$$a_{123} = -a_{213} = a_{231} = -a_{321} = a_{312} = -a_{132}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \omega(x, y, z) &= a_{123}(x_1y_2z_3 - x_2y_1z_3 + x_1y_3z_1 - x_3y_2z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2) \\ &= a_{123} \det(x, y, z). \end{aligned}$$

Weil nur eine Konstante zur Verfügung steht, findet man, dass  $\dim(\Lambda^3((\mathbb{R}^3)^*)) = 1$ .

Sei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  eine Basis für  $V$ . Dann ist  $L \in V^*$  durch die Werte auf den Basiselementen festgelegt. Anders gesagt  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} \subset V^*$  mit

$$\varepsilon_i(c_1e_1 + \dots + c_n e_n) = c_i \text{ für alle } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \quad (12.1)$$

bildet eine Basis für  $V^*$ . Dies bedeutet

$$\dim(\Lambda^1(V^*)) = \dim V^* = \dim V = n.$$

Wegen der Linearität reicht es übrigens für (12.1), wenn man  $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$  setzt.

Aus der Multilinearität folgt, dass jede  $k$ -multilineare Abbildung durch die Werte angenommen auf  $\{e_1, \dots, e_n\}^k$  festgelegt ist. Die Antisymmetrie sorgt dafür, dass der Wert unter Permutationen festliegt. Das heißt,  $\omega \in \Lambda^k(V^*)$  ist genau festgelegt, wenn alle

$$c_{i_1, i_2, \dots, i_k} := \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) \text{ mit } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$$

bekannt sind. Das heißt, man kann genau  $\binom{n}{k}$  Koeffizienten frei wählen und dies bedeutet  $\Lambda^k(V^*)$  ist  $\binom{n}{k}$ -dimensional.

**Lemma 12.5** Für  $\dim V = n$  hat man  $\dim(\Lambda^k(V^*)) = \binom{n}{k}$ .

**Korollar 12.6** Für  $V = \mathbb{R}^n$  hat man  $\omega \in \Lambda^n(V^*)$ , genau dann, wenn

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = c \det(v_1, \dots, v_n).$$

**Beweis.** Die Determinante ist als Funktion der  $n$  Spalten multilinear und antisymmetrisch. Weil  $\dim(\Lambda^n((\mathbb{R}^n)^*)) = 1$  gilt, folgt, dass jedes Element in  $\Lambda^n((\mathbb{R}^n)^*)$  ein Vielfaches der Determinante ist. ■

## 12.2 Das äußere Produkt

**Definition 12.7** Seien  $\omega \in \Lambda^k(V^*)$  und  $\eta \in \Lambda^m(V^*)$ . Man definiert  $\omega \wedge \eta$  durch

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{k+m}) = \frac{1}{k!m!} \sum_{\sigma \in \text{Perm}_{k+m}} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+m)}).$$

Hier sind  $\text{Perm}_{k+m}$  alle Permutationen von  $\{1, \dots, k+m\}$  und man nimmt

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{bei einer geraden Permutation } \sigma, \\ -1 & \text{bei einer ungeraden Permutation } \sigma. \end{cases}$$

Man nennt  $\omega \wedge \eta$  **das äußere Produkt** von  $\omega$  und  $\eta$ .

**Bemerkung 12.7.1** Jede Permutation einer endlichen Menge kann man bekommen durch endlich viele Vertauschungen zweier Elemente. Eine Permutation heißt (un)gerade, wenn man eine (un)gerade Zahl von Vertauschungen braucht.

**Bemerkung 12.7.2** Andere Namen für  $\wedge$  sind Dachprodukt, Keilprodukt und sogar Hutprodukt. Wenn man interessiert ist an der abstrakten Struktur hinter diesem  $\wedge$ -Produkt, dann suche man in der Literatur nach Grassmann-Algebra.

**Lemma 12.8** Für  $\omega \in \Lambda^k(V^*)$  und  $\eta \in \Lambda^m(V^*)$  gilt  $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{m+k}(V^*)$ .

**Beweis.** Die Multilinearität sieht man direkt. Die Antisymmetrie folgt mittels  $\text{sgn}(\sigma)$ : wenn  $\sigma_{ij}$  die Vertauschung von  $i$  und  $j \neq i$  darstellt, findet man  $\text{sgn}(\sigma_{ij} \circ \sigma) = -\text{sgn}(\sigma)$  und, mit ein wenig Buchhaltung, das gewünschte Ergebnis. ■

**Beispiel 12.9** Für  $\omega, \eta \in \Lambda^1(V^*)$  folgt

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, v_2) = \omega(v_1)\eta(v_2) - \omega(v_2)\eta(v_1).$$

Für  $\omega \in \Lambda^1(V^*)$  und  $\eta \in \Lambda^2(V^*)$  folgt

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, v_2, v_3) = \omega(v_1)\eta(v_2, v_3) - \omega(v_2)\eta(v_1, v_3) + \omega(v_3)\eta(v_1, v_2).$$

**Theorem 12.10 (Rechenregel für das äußere Produkt)** Sei  $\omega_{(i)} \in \Lambda^k(V^*)$ ,  $\eta \in \Lambda^\ell(V^*)$  und  $\nu \in \Lambda^m(V^*)$ . Es gilt:

1.  $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$ ;
2.  $\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge \omega$ ;

$$3. (\omega \wedge \eta) \wedge \nu = \omega \wedge (\eta \wedge \nu).$$

**Beispiel 12.11** Für  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Lambda^1(V^*)$  hat man

$$(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3)(v_1, v_2, v_3) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \omega_1(v_2) & \omega_1(v_3) \\ \omega_2(v_1) & \omega_2(v_2) & \omega_2(v_3) \\ \omega_3(v_1) & \omega_3(v_2) & \omega_3(v_3) \end{pmatrix}.$$

**Beweis.** Die erste Behauptung folgt sofort aus der Definition. Für die zweite soll man bemerken, dass

$$(\eta \wedge \omega)(v_1, \dots, v_\ell, v_{\ell+1}, \dots, v_{\ell+k}) = (\omega \wedge \eta)(v_{\ell+1}, \dots, v_{\ell+k}, v_1, \dots, v_\ell)$$

und dass man mit  $k\ell$  Vertauschungen  $(v_1, \dots, v_\ell)$  vor  $(v_{\ell+1}, \dots, v_{\ell+k})$  bekommt:

$$(\omega \wedge \eta)(v_{\ell+1}, \dots, v_{\ell+k}, v_1, \dots, v_\ell) = (-1)^{k\ell} (\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_\ell, v_{\ell+1}, \dots, v_{\ell+k}).$$

Um die letzte Behauptung zu beweisen, muß man ein guter Buchhalter sein. Wenn man bedenkt, dass

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k!m!} \sum_{\sigma \in \text{Perm}_{k+m}} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+m)}) = \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in \text{Perm}_{k+m} \\ \sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(k) \\ \sigma(k+1) < \sigma(k+2) < \dots < \sigma(k+m)}} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+m)}), \end{aligned}$$

bemerkt man, dass die Definition nur davon abhängt, welche  $k$  Kugeln sich in dem  $\omega$ -Beutel und welche  $m$ -Kugeln sich in dem  $\eta$ -Beutel befinden. Es wird über diese Verteilungen summiert und nicht über die Folge in jedem Beutel. Weil es für die Verteilung egal ist, ob man erst in Häufchen mit  $k+\ell$  und  $m$  Kugeln verteilt und dann das  $k+\ell$  Häufchen nochmals in ein  $k$  und in ein  $\ell$  Häufchen aufteilt, oder gleich in drei Häufchen mit  $k$ ,  $\ell$  und  $m$  Kugeln, gilt

$$\begin{aligned} & ((\omega \wedge \eta) \wedge \nu)(v_1, \dots, v_{k+\ell+m}) = \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in \text{Perm}_{k+\ell+m} \\ \sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(k) \\ \sigma(k+1) < \sigma(k+2) < \dots < \sigma(k+\ell) \\ \sigma(k+\ell+1) < \sigma(k+\ell+2) < \dots < \sigma(k+\ell+m)}} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)}) \nu(v_{\sigma(k+\ell+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell+m)}) \\ &= (\omega \wedge (\eta \wedge \nu))(v_1, \dots, v_{k+\ell+m}) \end{aligned}$$

und die dritte Behauptung. ■

Wir können sogar eine Basis für  $\Lambda^k(V^*)$  konstruieren. Sei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  eine Basis für  $V$  und sei  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  die duale Basis für  $V^*$  wie in (12.1). Sei jetzt  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  ein geordneter  $k$ -Tupel aus  $\{1, \dots, n\}$ ; das heißt  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ . Wir definieren

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_k}. \quad (12.2)$$

**Theorem 12.12**  $\{\varepsilon_I; I \text{ geordneter } k\text{-Tupel}\}$  mit  $\varepsilon_I$  definiert in (12.2) ist eine Basis für  $\Lambda^k(V^*)$ .

**Beweis.** Man betrachte die Überlegungen bei Lemma 12.5. ■

Seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $\mathbb{R}$  und sei  $L : W \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. Mit dieser linearen Abbildung  $L$  lässt sich eine lineare Abbildung  $L^* : \Lambda^k(V^*) \rightarrow \Lambda^k(W^*)$  konstruieren:

$$(L^*\omega)(w_1, \dots, w_k) = \omega(Lw_1, \dots, Lw_k).$$

**Notation 12.13** Man sagt, eine äußere Form  $\omega$  auf  $V$  lässt sich mit einer linearen Abbildung  $L : W \rightarrow V$  zurückziehen zu einer äußeren Form  $L^*\omega$  in  $W$ .

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{L} & V \\ \Lambda^k(W^*) & \xleftarrow{L^*} & \Lambda^k(V^*) \end{array}$$

Schlussendlich wollen wir noch zeigen, dass ein inneres Produkt von einem Vektor  $v \in V$  mit einer  $k$ -Form  $\omega$  eine  $(k-1)$ -Form liefert:

**Definition 12.14** Sei  $v \in V$  und  $\omega \in \Lambda^k(V^*)$  mit  $k \geq 1$ . Dann setzt man

$$(v \lrcorner \omega)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega(v, v_1, \dots, v_{k-1}).$$

**Bemerkung 12.14.1** Zu  $v \lrcorner \omega$  sagt man „ $v$  eingehängt in  $\omega$ “.

Man findet, dass  $v \lrcorner \omega \in \Lambda^{k-1}(V^*)$ , denn die Multilinearität und die Antisymmetrie von  $v \lrcorner \omega$  folgt aus der von  $\omega$ .

## 12.3 Ortsabhängige $k$ -Formen

**Definition 12.15** Für die Standardbasis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  in  $\mathbb{R}^n$  definiert man  $dx_i \in \Lambda^1((\mathbb{R}^n)^*)$  für  $v = v_1e_1 + \dots + v_n e_n$  durch

$$dx_i(v) = v_i.$$

Eine Basis für  $\Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$  ist dann

$$\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}; 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}.$$

Das wiederum heißt, dass jede äußere  $k$ -Form  $\omega$  die Gestalt

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad (12.3)$$

hat. Wir können dann diese allgemeine Form von der Stelle  $x$  abhängen lassen, indem man  $\omega_{i_1 i_2 \dots i_k}$  als Funktion von  $x$  zulässt. Wegen der Antisymmetrie hat man  $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} = -dx_{i_2} \wedge dx_{i_1}$  und man kann sich bei der Summierung ohne Verlust der Allgemeinheit beschränken auf geordnete  $k$ -Tupel.

**Definition 12.16** Für  $\omega_{i_1 i_2 \dots i_k} \in C^\ell(U)$  mit  $U \subset \mathbb{R}^n$ , nennt man  $\omega$  in (12.3) eine  $k$ -Form der Klasse  $C^\ell$  auf  $U$  und schreibt

$$\omega \in \Omega_\ell^k(U).$$

**Bemerkung 12.16.1** Man erinnere sich, dass  $C^\ell(U)$  die Menge der  $\ell$ -mal stetig-differenzierbaren Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist.



Die einfachste Art, eine 1-Form zu definieren, ist wie folgt:

**Definition 12.17** Das **Differential** von  $f \in C^{\ell+1}(U)$  mit  $\ell \geq 1$  für offenes  $U \subset \mathbb{R}^n$  definiert man durch

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

**Bemerkung 12.17.1** Da man eine Funktion auf  $U$  auch als Nullform auffassen kann, gilt sozusagen  $\Omega_{\ell+1}^0(U) = C^{\ell+1}(U)$ .

**Bemerkung 12.17.2** Für solche  $f$  ist  $df$  also eine Differentialform von Ordnung 1. Allgemein nennt man  $\omega$  wie in Definition 12.16 eine Differentialform von Ordnung  $k$ .

Für  $f \in C^{\ell+1}(U)$  folgt  $df \in \Omega_{\ell}^1(U)$  und mit  $v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n$  gilt

$$df(v) = \nabla f \cdot v.$$

Genauer wäre es, wenn man schreiben würde  $df(p, v) = \nabla f(p) \cdot v$ .



# Analysis 3, Woche 13



## Skalarprodukt und Volumenform

### 13.1 Allgemeines Skalarprodukt

Bis jetzt sind wir nur dem Standardskalarprodukt begegnet. Für  $V = \mathbb{R}^n$  wird

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ . Wir möchten ein allgemeineres Skalarprodukt zulassen. In der Physik ist man zum Beispiel interessiert an

$$\left\langle \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ s \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - ts.$$

#### 13.1.1 Definition des Skalarproduktes

**Definition 13.1** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum. Die Abbildung  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  nennt man ein nicht-ausgeartetes Skalarprodukt, wenn folgendes erfüllt ist:

1.  $(v_1, v_2) \mapsto g(v_1, v_2)$  ist multilinear (siehe Definition 12.1);
2.  $g$  ist symmetrisch:  $g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$ ;
3.  $g$  ist nicht-ausgeartet:  $g(v, w) = 0$  für alle  $v \in V$  impliziert  $w = 0$ .

**Bemerkung 13.1.1** Wenn wir  $V = T_p M$  betrachten, dann wird  $g$  im Allgemeinen auch von der Stelle  $p \in M$  abhängen und man bekommt  $g : M \times T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ . Für jede  $p$  sollen die Bedingungen in Definition 13.1 erfüllt sein und als Funktion von  $p$  soll  $g$  genügend nett sein.

Wenn  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis ist für  $V$ , dann kann man eine Matrix  $M_B(g) \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  definieren durch

$$(M_B(g))_{ij} = g(b_i, b_j). \quad (13.1)$$

Für  $v = \sum_{i=1}^n x_i b_i$  und  $w = \sum_{i=1}^n y_i b_i$  gilt dann

$$g(v, w) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot M_B(g) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (13.2)$$

Wenn  $g$  symmetrisch ist, folgt  $M_B(g) = M_B(g)^T$ .

**Lemma 13.2** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum und sei  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  multilinear und symmetrisch. Dann sind äquivalent:

1.  $g$  ist nicht-ausgeartet;
2. für jede Basis  $B$  für  $V$  gilt  $\det(M_B(g)) \neq 0$ ;
3. es gibt eine Basis  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  mit

$$\begin{cases} g(b_i, b_j) = 0 & \text{für alle } i \neq j, \\ g(b_i, b_j) \neq 0 & \text{für alle } i = j; \end{cases}$$

4. es gibt eine Basis  $B$  für  $V$  derart, dass

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (13.3)$$

das heißt,  $M_B(g)$  ist eine Diagonalmatrix mit nur 1 und  $-1$  auf der Diagonalen.

**Beweis.** Sei  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis für  $V$  und definiere  $M_B(g)$  wie in (13.1). Die Matrix  $M_B(g)$  ist symmetrisch und symmetrische Matrizen sind orthogonal diagonalisierbar. Das heißt, es gibt eine Transformationsmatrix  $S$  und eine Diagonalmatrix  $D$  derart, dass  $S^{-1} = S^T$  und

$$M_B(g) = S^T D S.$$

Auf der Diagonalen von  $D$  stehen die Eigenwerte von  $M_B(g)$ .

$1 \Rightarrow 2$ . Schreiben wir  $v$  und  $w$  wie in (13.2), dann ist die dritte Bedingung in Definition 13.1 identisch mit

$$x^T M_B(g) y = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \implies y = 0. \quad (13.4)$$

Weil  $x^T M_B(g) y = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  genau bedeutet, dass  $M_B(g) y = 0$ , kann  $M_B(g)$  keinen Eigenwert gleich 0 haben, denn dann wäre (13.4) verletzt. Da  $\det(M_B(g))$  dem Produkt der Eigenwerte gleich, findet man  $\det(M_B(g)) \neq 0$ .

$2 \Rightarrow 3$ . Sei  $D$  und  $S$  wie oben. Setzt man

$$\tilde{b}_i = \sum_{j=1}^n S_{ij} b_j$$

so folgt aus der Multilinearität

$$M_{\tilde{B}}(g) = g(\tilde{b}_i, \tilde{b}_j) = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^n S_{i\ell} S_{jk} g(b_\ell, b_k) = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^n S_{i\ell} g(b_\ell, b_k) (S^T)_{kj} \quad (13.5)$$

und aus der Definition von  $M_B(g)$ , dass

$$\begin{aligned} (13.5) &= \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^n S_{i\ell} (M_B(g))_{\ell k} (S^T)_{kj} \\ &= (S M_B(g) S^T)_{ij} = (S S^T D S S^T)_{ij} = D_{ij}. \end{aligned}$$

Für  $\{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\}$  als neue Basis folgt  $M_{\tilde{B}}(g) = D$ , eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von  $M_B(g)$  auf der Diagonalen.

3  $\Rightarrow$  4. Setzt man  $\hat{b}_i = |D_{ii}|^{-1/2} \tilde{b}_i$  so folgt

$$g(\hat{b}_i, \hat{b}_j) = |D_{ii}|^{-1/2} |D_{jj}|^{-1/2} g(\tilde{b}_i, \tilde{b}_j) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ \text{sgn}(D_{ii}) & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Durch eventuelles Umsortieren der  $\hat{b}_i$  kann man dafür sorgen, dass erst 1 und dann  $-1$  auf der Diagonalen steht.

4  $\Rightarrow$  1. Sei  $w = \sum_{i=1}^n y_i \hat{b}_i$ . Wenn  $g(v, w) = 0$  für alle  $v \in V$ , dann gilt

$$x^T M_{\hat{B}}(g) y = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Es folgt  $M_{\hat{B}}(g)y = 0$  und dies ist mit  $M_{\hat{B}}(g)$  wie in (13.3) genau  $\pm y_i = 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Also folgt  $y = 0$ .  $\blacksquare$

**Bemerkung 13.2.1** Nennen wir die Zahl der positiven Eigenwerte  $p$  und die Zahl der negativen  $q$ , dann ist das Paar  $(p, q)$  die **Signatur** des Skalarproduktes  $g$  auf der Basis  $B$ . Man kann zeigen, dass diese Signatur unabhängig von der gewählten Basis ist.

**Definition 13.3** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum und sei  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  ein nicht-entartetes Skalarprodukt auf  $V$ .

1. Eine Basis  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  derart, dass  $M_B(g)$  wie in (13.3) ist, nennen wir eine Standardbasis für  $V$  bezüglich  $g$ .
2. Die zugehörige Standardbasis für  $V^*$  ist dann  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  mit

$$\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

**Beispiel 13.4** Definieren wir  $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$g(x, y) = x^T \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} y, \quad (13.6)$$

dann bekommt man ein nicht-entartetes Skalarprodukt. Die Symmetrie von  $g$  folgt aus der Symmetrie der Matrix. Weil die Determinante dieser Matrix gleich  $-66$  ist, ist  $g$  nicht-entartet. Eine Standardbasis für  $\mathbb{R}^3$  bezüglich dieses  $g$  ist dann, nach einigem Rechnen,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{89-5}}(\sqrt{89+11}) \\ \frac{\sqrt{\frac{445}{4} + \frac{49}{4}\sqrt{89}}}{\sqrt{89-5}}(\sqrt{89+11}) \\ \frac{\sqrt{\frac{445}{4} + \frac{49}{4}\sqrt{89}}}{1} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{445}{4} + \frac{49}{4}\sqrt{89}}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{89+5}}(\sqrt{89-11}) \\ \frac{\sqrt{\frac{445}{4} - \frac{49}{4}\sqrt{89}}}{\sqrt{89+5}}(\sqrt{89-11}) \\ \frac{\sqrt{\frac{445}{4} - \frac{49}{4}\sqrt{89}}}{1} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{445}{4} - \frac{49}{4}\sqrt{89}}} \end{pmatrix} \right\}.$$

Diese drei Vektoren sind Eigenvektoren der Matrix in (13.6) mit einer passenden Skalierung. Man findet

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (13.7)$$

Statt diese Basis  $B$  jedoch explizit zu berechnen, findet man die Signatur von  $g$ , wenn man bedenkt, dass wegen des Vorzeichens der Determinante der Matrix in (13.6) nur  $(p, q) = (2, 1)$  oder  $(p, q) = (0, 3)$  zutreffen kann. Dazu erinnere man sich, dass die Determinante das Produkt der Eigenwerte ist und bei  $-66$  die Zahl der negativen Eigenwerte ungerade sein muss. Weil

$$g(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 10 > 0$$

und weil für den größten Eigenwert der Matrix in (13.6) gilt, dass

$$\lambda_{\max} = \sup_{\|v\| \neq 0} \frac{g(v, v)}{\|v\|^2} \geq \frac{g(e_1 + e_2, e_1 + e_2)}{\|e_1 + e_2\|^2} = 5,$$

gibt es mindestens einen positiven Eigenwert und bleibt nur  $(p, q) = (2, 1)$ . Wegen Lemma 13.2 gibt es eine Basis  $B$  mit (13.7).

**Beispiel 13.5** Man sieht, dass

$$g(x, y) = x^T \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 \\ 2 & -7 & 16 \end{pmatrix} y,$$

kein nicht-ausgeartetes Skalarprodukt gibt, weil die Determinante gleich 0 ist.

### 13.1.2 Skalarprodukt für den Dualraum

**Definition 13.6** Ein Skalarprodukt  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  liefert ein zugehöriges Skalarprodukt  $\bar{g} : V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\bar{g}(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (M_B(g)^{-1})_{ij} \alpha(b_i) \beta(b_j) \text{ für } \alpha, \beta \in V^*. \quad (13.8)$$

Bemerke, weil  $\det(M_B(g)) \neq 0$ , dass die inverse Matrix  $M_B(g)^{-1}$  existiert. Die Matrix  $M_B(g)^{-1}$  ist auch symmetrisch.

Wenn es aus dem Kontext klar ist, welche Basis  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  man hat, sieht man oft die folgenden Schreibweisen:

$$g_{ij} = (M_B(g))_{ij} \text{ und } g^{ij} = (M_B(g)^{-1})_{ij}. \quad (13.9)$$

Der Grund, dass man in (13.8) die inverse Matrix benutzt, ist das folgende Ergebnis,

**Lemma 13.7** Die Definition von  $\bar{g}$  in (13.8) ist unabhängig von der Wahl der Basis.

**Beweis.** Sei  $\tilde{B} = \{f_1, \dots, f_n\}$  eine andere Basis, sagen wir

$$f_i = \sum_{k=1}^n F_{ik} b_k.$$

Dann gilt, dass die Matrix  $F$  invertierbar ist und dass

$$(M_{\tilde{B}}(g))_{ij} = g(f_i, f_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n F_{ik} F_{j\ell} g(b_k, b_\ell) = (F M_B(g) F^T)_{ij}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha(f_1) \\ \vdots \\ \alpha(f_n) \end{pmatrix} \cdot M_{\tilde{B}}(g)^{-1} \begin{pmatrix} \beta(f_1) \\ \vdots \\ \beta(f_n) \end{pmatrix} &= \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} F_{1k}\alpha(b_k) \\ \vdots \\ F_{nk}\alpha(b_k) \end{pmatrix} \cdot M_{\tilde{B}}(g)^{-1} \sum_{\ell=1}^n \begin{pmatrix} F_{1\ell}\beta(b_\ell) \\ \vdots \\ F_{n\ell}\beta(b_\ell) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F \begin{pmatrix} \alpha(b_1) \\ \vdots \\ \alpha(b_n) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot (F M_B(g) F^T)^{-1} F \begin{pmatrix} \beta(b_1) \\ \vdots \\ \beta(b_n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(b_1) \\ \vdots \\ \alpha(b_n) \end{pmatrix} \cdot F^T \left( (F^T)^{-1} M_B(g)^{-1} F^{-1} \right) F \begin{pmatrix} \beta(b_1) \\ \vdots \\ \beta(b_n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(b_1) \\ \vdots \\ \alpha(b_n) \end{pmatrix} \cdot M_B(g)^{-1} \begin{pmatrix} \beta(b_1) \\ \vdots \\ \beta(b_n) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dies ist genau

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (M_{\tilde{B}}(g)^{-1})_{ij} \alpha(f_i) \beta(f_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (M_B(g)^{-1})_{ij} \alpha(b_i) \beta(b_j)$$

und die Behauptung, dass die Definition in (13.8) nicht von der Basis abhängt. ■

Dieses Skalarprodukt wird wie folgt erweitert auf die Räume  $\Lambda^k(V^*)$ :

**Definition 13.8** Sei  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  ein nicht-ausgeartetes Skalarprodukt und  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  eine Basis für  $V$ . Dann definiert man  $\bar{g} : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V^*) \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $g^{ij}$  wie in (13.9), wie folgt:

$$\bar{g}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n}} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \dots g^{i_k j_k} \omega_1(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \omega_2(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$$

für  $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^k(V^*)$ . NB: Auch hier hängt  $\bar{g}$  nicht von der Basis ab.

### 13.1.3 Volumenform und Orientierung

In  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  können wir uns eine Vorstellung davon machen, was wir unter einer rechts- oder linksorientierten Basis verstehen. In höheren Dimensionen haben wir keine Vorstellung, die uns dabei helfen würde, links oder rechts zu unterscheiden. Wir können aber schon alle Basen in zwei Klassen aufteilen. Seien  $B_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$  und  $B_2 = \{d_1, \dots, d_n\}$  zwei verschiedene Basen, dann gibt es eine Matrix  $F$ , die  $B_1$  überführt in  $B_2$ :

$$d_i = F_{i1}e_1 + \dots + F_{in}e_n. \quad (13.10)$$

Wenn  $\det(F) > 0$  sagen wir, dass  $B_1$  und  $B_2$  gleich orientiert sind; wenn  $\det(F) < 0$  nennt man  $B_1$  und  $B_2$  entgegengesetzt orientiert.

**Definition 13.9** Sei  $V$  ein Vektorraum mit einem nicht-ausgearteten Skalarprodukt  $g$  und sei  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  eine Standardbasis wie in Definition mit  $M_B(g)$  wie in (13.3). Dann nennt man  $dV \in \Lambda^n(V^*)$ , definiert durch

$$dV(v_1, \dots, v_n) = \det \begin{pmatrix} g(v_1, e_1) & \cdots & g(v_n, e_1) \\ \vdots & & \vdots \\ g(v_1, e_n) & \cdots & g(v_n, e_n) \end{pmatrix}, \quad (13.11)$$

die Volumenform zu  $g$ .

**Bemerkung 13.9.1** Diese Volumenform ist nicht ganz unabhängig von der gewählten Standardbasis. Sei  $\{d_1, \dots, d_n\}$  eine andere Standardbasis, und  $F$  als in (13.10), so gilt

$$g(e_i, d_j) = \sum_{k=1}^n F_{jk} g(e_i, e_k) = F_{ji} g(e_i, e_i)$$

und

$$g(e_i, d_j) = \sum_{k=1}^n (F^{-1})_{ik} g(d_k, d_j) = (F^{-1})_{ij} g(d_j, d_j).$$

Dann kann man  $F$  und  $F^{-1}$  wie folgt schreiben:

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F^{-1} = \begin{pmatrix} F_1^T & -F_3^T \\ -F_2^T & F_4^T \end{pmatrix}$$

mit  $F_1$  eine  $p \times p$ -Matrix und dies bedeutet  $\det(F^{-1}) = (-1)^{2q} \det(F) = \det(F)$ . Also folgt  $\det(F) = \pm 1$  und

$$\det\left((g(v_i, d_j))_{ij}\right) = \det F \det\left((g(v_i, e_j))_{ij}\right) = \pm \det\left((g(v_i, e_j))_{ij}\right).$$

Das  $\pm$ -Zeichen der so definierten Volumenform hängt also ab von der Orientierung der Basis. Für alle Basen die gleich orientiert sind, bekommt man die gleiche Form. Ist eine Basis entgegengesetzt orientiert, so findet man zusätzlich ein Minus-Zeichen. Wenn man zum Beispiel  $e_1$  und  $e_2$  in der Basis vertauscht, ändert sich die Orientierung.

**Bemerkung 13.9.2** Auch hier wollen wir  $V = T_p M$  betrachten und man würde, für  $g : M \times T_p M \times T_p M$  abhängig von  $p$ , eine Volumenform  $dV(p; v_1, \dots, v_n)$  bekommen.

Wenn  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  die duale Basis auf  $V^*$  zu der Basis  $B$  wie in Lemma 13.2.4 ist, das heißt  $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$ , dann gilt

$$dV = (-1)^q \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n. \quad (13.12)$$

Um (13.12) zu zeigen bemerke man, dass es reicht, wenn man (13.12) für Basisvektoren beweist. Weil  $\dim(\Lambda^n(V^*)) = 1$  gilt, hat eine Basis für  $\Lambda^n(V^*)$  genau ein Element, zum Beispiel  $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n$ . Dann gilt, dass  $dV$  eine Konstante mal dieses Basiselement ist. Testet man mit dem  $n$ -Tupel  $(e_1, \dots, e_n)$  so findet man

$$dV(e_1, \dots, e_n) = \det\left(g(e_i, e_j)_{ij}\right) = (-1)^q = (-1)^q (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n)(e_1, \dots, e_n).$$

**Beispiel 13.10** Wir betrachten  $M = \mathbb{R}^2 / \sim$  mit  $(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2)$  wenn  $a_1 - b_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$  und  $a_2 - b_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$ . Wir definieren das Skalarprodukt  $g : M \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  für Konstanten  $0 < r < R$  durch

$$g(p; x, y) := x^T \begin{pmatrix} (R + r \cos(p_2))^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} y. \quad (13.13)$$



Eine Standardbasis wie in Definition 13.3 ist dann

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} (R + r \cos(p_2))^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ r^{-1} \end{pmatrix} \right\}.$$

Die zugehörige Volumenform wird

$$\begin{aligned} dV(p; v_1, v_2) &= \det \begin{pmatrix} g(p; v_1, e_1) & g(p; v_2, e_1) \\ g(p; v_1, e_2) & g(p; v_2, e_2) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} v_{11}(R + r \cos(p_2)) & v_{21}(R + r \cos(p_2)) \\ v_{12}r & v_{22}r \end{pmatrix} \\ &= r(R + r \cos(p_2))(v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21}) \\ &= r(R + r \cos(p_2))(dx_1 \wedge dx_2)(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Wenn man  $M$  aufrollt mittels

$$M \ni (\vartheta, \varphi) \mapsto \psi \begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r \cos \varphi) \cos \vartheta \\ (R + r \cos \varphi) \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

dann sieht man, dass das Skalarprodukt in (13.13) für  $M$  genau die passende Volumenform liefert für den Torus in Beispiel 11.3 mit den üblichen Koordinaten:

$$dV \left( \begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix}; \cdot, \cdot \right) = r(R + r \cos(\varphi))(d\vartheta \wedge d\varphi).$$

Siehe Abbildung 13.1. Der Faktor  $r(R + r \cos(\varphi))$  ist genau derjenige, der erscheint, wenn man ein Integral über den Torus definiert:

$$\int_{\text{Torus}_{r,R}} f \, ds = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} (f \circ \psi) \begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} r(R + r \cos(\varphi)) \, d\vartheta d\varphi.$$

Das Ganze ist kein Zufall, den  $g$  in (13.13) ist absichtlich so konstruiert worden.

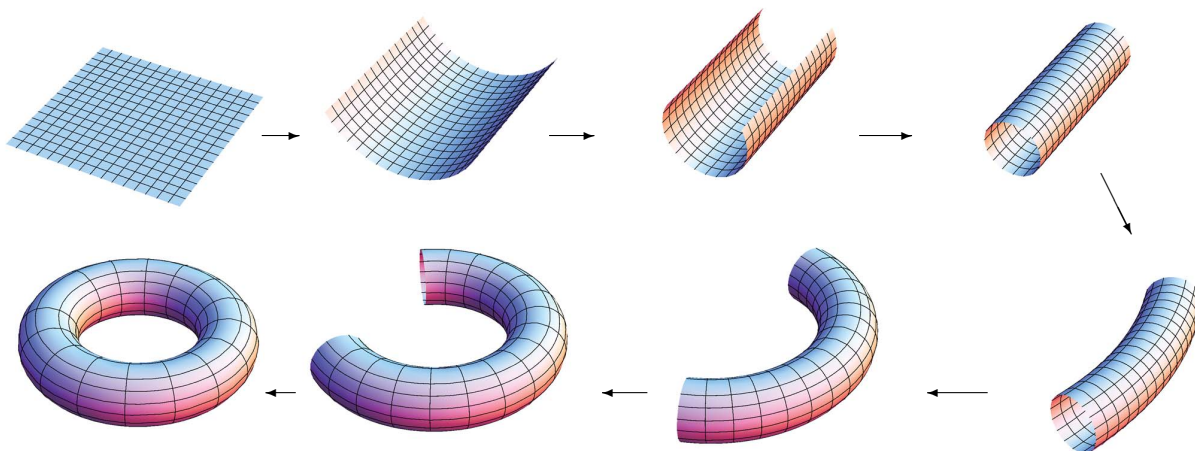


Abbildung 13.1: Wie man aufrollen kann. Beispiel 13.10.

### 13.1.4 Hodge-Operator

Für den  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $V$  gilt

$$\dim(\Lambda^m(V^*)) = \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} = \dim(\Lambda^{n-m}(V^*)).$$

In der folgenden Definition wird eine bijektive Abbildung von  $\Lambda^m(V^*)$  nach  $\Lambda^{n-m}(V^*)$  festgelegt. Dieser Hodge-Operator ist wichtig in der algebraischen Geometrie.

**Definition 13.11** Sei  $V$  ein Vektorraum mit einem nicht-ausgearteten Skalarprodukt  $g$  und  $dV$  der Volumenform in (13.11). Für  $\omega \in \Lambda^m(V^*)$  definiert man  $*\omega \in \Lambda^{n-m}(V^*)$  als die eindeutige  $(n-m)$ -Form derart, dass

$$\omega \wedge \eta = \bar{g}(*\omega, \eta) dV \text{ für alle } \eta \in \Lambda^{n-m}(V^*).$$

Man nennt  $*$  :  $\Lambda^m(V^*) \rightarrow \Lambda^{n-m}(V^*)$  den Hodge-Operator.

**Bemerkung 13.11.1** Dieser Hodge-Operator ist abhängig vom Skalarprodukt  $g$ . Eigentlich hätte man also  $*_g$  schreiben müssen.



W.V.D. Hodge

Dieser Hodge-Operator ist wohldefiniert und das sieht man wie folgt: Für  $\omega \in \Lambda^m(V^*)$  und  $\eta \in \Lambda^{n-m}(V^*)$  gilt  $\omega \wedge \eta \in \Lambda^n(V^*)$ . Außerdem ist für jedes  $\eta \in \Lambda^{n-m}(V^*)$  die Abbildung

$$(\eta \mapsto \omega \wedge \eta) \in L(\Lambda^{n-m}(V^*); \Lambda^n(V^*))$$

linear. Weil  $\Lambda^n(V^*)$  eindimensional ist, und die Volumenform  $dV$  eine Basis für  $\Lambda^n(V^*)$  liefert, gibt es  $c \in (\Lambda^{n-m}(V^*))^*$ , also eine lineare Abbildung von  $\Lambda^{n-m}(V^*)$  nach  $\mathbb{R}$ , mit

$$\omega \wedge \eta = c(\eta) dV \text{ für alle } \eta \in \Lambda^{n-m}(V^*).$$

Weil  $\bar{g}$  ein nicht-ausgeartetes Skalarprodukt auf  $\Lambda^{n-m}(V^*)$  ist, gibt es wegen Lemma 13.2 höchstens eine Form  $\nu \in \Lambda^{n-m}(V^*)$  mit

$$c(\eta) = \bar{g}(\nu, \eta) \text{ für alle } \eta \in \Lambda^{n-m}(V^*).$$

Weil  $(\Lambda^{n-m}(V^*))^*$  und  $\Lambda^{n-m}(V^*)$  die gleiche Dimension haben, gibt es auch genau eine Form. Also ist  $*\omega := \nu$  tatsächlich wohldefiniert.

**Lemma 13.12** Sei  $V$  ein Vektorraum mit einem nicht-ausgearteten Skalarprodukt  $g$ . Dann gilt

1. Sei  $\{e_i\}_{i=1}^n$  eine Standardbasis für  $V$  wie in Lemma 13.2.4 und seien  $\varepsilon_i \in \Lambda^1(V^*)$  derart, dass  $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$ . Für eine Permutation  $\sigma$  auf  $\{1, \dots, n\}$  mit

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(m) \text{ und } \sigma(m+1) < \sigma(m+2) < \dots < \sigma(n)$$

gilt

$$\begin{aligned} *(\varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \varepsilon_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{\sigma(m)}) = \\ (-1)^q \operatorname{sgn}(\sigma) g^{\sigma(m+1)\sigma(m+1)} \dots g^{\sigma(n)\sigma(n)} (\varepsilon_{\sigma(m+1)} \wedge \varepsilon_{\sigma(m+2)} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{\sigma(n)}). \end{aligned}$$

2. Sei  $\omega \in \Lambda^m(V^*)$ . Dann gilt

$$**\omega = (-1)^{m(n-m)+q} \omega.$$

3. Seien  $\omega, \eta \in \Lambda^m(V^*)$ . Dann gilt

$$\bar{g}(*\omega, *\eta) = (-1)^q \bar{g}(\omega, \eta).$$

**Beweis. 1.** Sei  $i_k \in \{1, \dots, n\}$ . Wenn  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$  keine Permutation von  $\{1, \dots, n\}$  ist, dann gibt es zweimal die gleiche Zahl und es folgt

$$\varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_n} = 0.$$

Die einzigen nicht-trivialen  $k$ -Formen  $\varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_n}$  sind die, bei denen  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$  eine Permutation ist. Schreiben wir für die Permutation:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m & m+1 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & & i_m & j_1 & \dots & j_{n-m} \end{pmatrix}. \quad (13.14)$$

Dann gilt wegen (13.12), dass

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_m} \wedge \varepsilon_{j_1} \wedge \varepsilon_{j_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_{n-m}} = \\ & = \operatorname{sgn}(\sigma) \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n = (-1)^q \operatorname{sgn}(\sigma) dV. \end{aligned} \quad (13.15)$$

Jede Permutation der letzten  $n-m$  Terme in  $\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_m} \wedge \varepsilon_{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_{n-m}}$  am Anfang von (13.15) liefert  $\pm (-1)^q \operatorname{sgn}(\sigma) dV$ . Man kann daraus schließen, dass es eine Zahl  $c$  gibt derart, dass

$$*(\varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_m}) = c \varepsilon_{j_1} \wedge \varepsilon_{j_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_{n-m}}$$

und darf dabei annehmen, dass  $j_1 < j_2 < \dots < j_{n-m}$ . Weil

$$\bar{g}(\varepsilon_{j_1} \wedge \varepsilon_{j_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_{n-m}}, \varepsilon_{j_1} \wedge \varepsilon_{j_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_{n-m}}) = g^{j_1 j_1} g^{j_2 j_2} \dots g^{j_{n-m} j_{n-m}}$$

und  $g^{j_k j_k} \in \{-1, +1\}$  gilt, folgt für

$$c = (-1)^q \operatorname{sgn}(\sigma) g^{j_1 j_1} g^{j_2 j_2} \dots g^{j_{n-m} j_{n-m}},$$

mit Definition 13.8, dass

$$\begin{aligned} & \bar{g}(*(\varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_m}), \varepsilon_{j_1} \wedge \varepsilon_{j_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_{n-m}}) dV = \\ & = c \bar{g}(\varepsilon_{j_1} \wedge \varepsilon_{j_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_{n-m}}, \varepsilon_{j_1} \wedge \varepsilon_{j_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_{n-m}}) dV = \\ & = (-1)^q \operatorname{sgn}(\sigma) (g^{j_1 j_1} g^{j_2 j_2} \dots g^{j_{n-m} j_{n-m}})^2 dV = \\ & = (-1)^q \operatorname{sgn}(\sigma) dV = \\ & = \operatorname{sgn}(\sigma) \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n = \\ & = \varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_m} \wedge \varepsilon_{j_1} \wedge \varepsilon_{j_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_{n-m}}. \end{aligned}$$

**2.** Für  $\omega = \varepsilon_I = \varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_m}$  mit  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ ,  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$  und  $J$  das Komplement zu  $I$ , mit der Standardanordnung so wie es auch in (13.15) definiert ist, und mit

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-m & n-m+1 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_{n-m} & i_1 & \dots & i_m \end{pmatrix}$$

gilt, dass

$$\begin{aligned} **\varepsilon_I &= * \left( (-1)^q \operatorname{sgn}(\sigma) g^{j_1 j_1} g^{j_2 j_2} \dots g^{j_{n-m} j_{n-m}} \varepsilon_I \right) = \\ &= (-1)^{2q} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tilde{\sigma}) g^{j_1 j_1} g^{j_2 j_2} \dots g^{j_{n-m} j_{n-m}} g^{i_1 i_1} g^{i_2 i_2} \dots g^{i_m i_m} \varepsilon_I = \\ &= (-1)^{(n-m)m} (-1)^q \varepsilon_I. \end{aligned}$$

Man verwendet, dass  $\operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tilde{\sigma}) = (-1)^{(n-m)m}$  und

$$g^{j_1 j_1} g^{j_2 j_2} \dots g^{j_{n-m} j_{n-m}} g^{i_1 i_1} g^{i_2 i_2} \dots g^{i_m i_m} = 1^p (-1)^q.$$

Weil  $\{\varepsilon_I; I \text{ geordneter } m\text{-Tupel aus } \{1, \dots, n\}\}$  eine Basis für  $\Lambda^m(V^*)$  bildet, ist der Beweis fast komplett. Man muss sich nur noch überlegen, dass mit zusätzlichen Funktionen  $f_I$  gilt, dass

$$* \left( \sum_{|I|=m} f_I \varepsilon_I \right) = \sum_{|I|=m} f_I (*\varepsilon_I).$$

**3.** Sei  $\omega, \eta \in \Lambda^m(V^*)$ . Dann gilt mit dem zweiten Ergebnis oben, dass

$$\begin{aligned} \bar{g}(*\omega, *\eta) dV &= \omega \wedge (*\eta) = (-1)^{(n-m)m} (*\eta) \wedge \omega = \\ &= (-1)^{(n-m)m} \bar{g}(**\eta, \omega) dV = (-1)^q \bar{g}(\eta, \omega) dV = (-1)^q \bar{g}(\omega, \eta) dV. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Beispiel 13.13** Für  $V = \mathbb{R}^n$  mit Standardbasen und dem Standardskalarprodukt ist dieser Hodge-Operator nur halb so schlimm. Für

$$\omega = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_m} \text{ mit } I = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$$

und  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$  findet man

$$*\omega = \operatorname{sgn}(\sigma) dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_{n-m}}$$

mit  $\sigma$  wie in (13.14). Dann folgt auch sofort, weil  $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$ , dass

$$**\omega = \omega. \quad (13.16)$$

## 13.2 Wieso?

Warum all dieses? Wir möchten das Werkzeug bereitlegen, um auch bei Mannigfaltigkeiten zugehörige Integrale auf passende Weise festzulegen und gegebenenfalls auch zu berechnen. Verwendet man Differentialformen, dann sieht die allgemeine Form des Satzes von Stokes harmlos aus:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Hier ist  $M$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  mit  $(m-1)$ -dimensionalem Rand  $\partial M$  und  $\omega \in \Omega_{\ell+1}^{m-1}(M)$ . In einer Dimension sieht dieser Satz übrigens wie folgt aus:

$$\int_a^b d\omega = \omega(b) - \omega(a).$$

## 13.3 Gradient, Divergenz und Rotation in $\mathbb{R}^n$

Bevor wir uns auf Mannigfaltigkeiten begeben, erinnern wir nochmal an einige Differentialoperatoren in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 13.14** • *Der Gradient für  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ :*

$$\text{grad } f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

• *Die Divergenz für  $v \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ :*

$$\text{div } v = \nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}.$$

• *Die Rotation für  $v \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ :*

$$\text{rot } v = \nabla \times v = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & v_1 & e_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & v_2 & e_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & v_3 & e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

*Auf englisch:*  $\text{rot } v = \text{curl } v$ .

• *Der Laplace-Operator für  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ :*

$$\Delta f = \text{div grad } f = \nabla \cdot \nabla f = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 f + \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 f + \cdots + \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 f.$$

## 13.4 Die klassischen Sätze von Gauß und Stokes

Der allgemeine Satz von Stokes liefert einige Spezialfälle, die wir hier betrachten werden.

Man nennt das Dreibein  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \subset \mathbb{R}^3$  positiv orientiert, wenn  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} > 0$ .

**Lemma 13.15** *Wenn  $\psi : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Immersion ist,  $M = \psi(A)$  eindeutig parametrisiert ist, und wenn  $v$  ein Vektorfeld auf  $M$  ist und  $d\sigma$  das Oberflächendifferential, dann gilt*

$$\iint_M v \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_A (v \circ \psi)(x, y) \cdot \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy.$$

Das Dreibein  $\left\{ \mathbf{n}, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\}$  soll positiv orientiert sein;  $\mathbf{n}$  ist ein stetiger Normaleneinheitsvektor auf  $M$ .

Das Oberflächendifferential gehört zu der positiven Volumenform auf  $M$ , die wir später noch genau definieren wollen.

**Theorem 13.16 (Gauß<sup>1</sup> in 3 Dimensionen)** *Sei  $U \subset \mathbb{R}^3$  offen und beschränkt und sei  $\partial U \in C^1$ . Sei  $v \in C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^3)$  und sei  $\mathbf{n}$  der auswärts gerichtete Normaleneinheitsvektor auf  $\partial U$  und  $d\sigma$  das Oberflächendifferential. Dann gilt*

$$\iiint_U \nabla \cdot v \, d\lambda = \iint_{\partial U} v \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

**Theorem 13.17 (Gauß in  $n$  Dimensionen)** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt und sei  $\partial U \in C^1$ . Sei  $v \in C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^n)$  und sei  $\mathbf{n}$  der auswärts gerichtete Normaleneinheitsvektor auf  $\partial U$  und  $d\sigma$  das Oberflächendifferential. Dann gilt

$$\int_U \nabla \cdot v \, d\lambda = \int_{\partial U} v \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

**Korollar 13.18** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt und sei  $\partial U \in C^1$ . Sei  $f, g \in C^2(\bar{U})$  und sei  $\mathbf{n}$  der auswärts gerichtete Normaleneinheitsvektor auf  $\partial U$  und  $d\sigma$  das Oberflächendifferential. Dann gilt

$$\int_U ((\Delta f)g - f(\Delta g)) \, d\lambda = \int_{\partial U} \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} g - f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma.$$

N.B.  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \nabla f \cdot \mathbf{n}$ .

**Bemerkung 13.18.1** Dieses Korollar ist auch bekannt als ein Satz von Green<sup>2</sup>.



Abbildung 13.2: Gauß, die Mühle von Green und Stokes. Green war Müller und Autodidakt. Seine Mühle in Nottingham gibt es noch.

**Theorem 13.19 (Stokes<sup>3</sup> klassisch)** Sei  $M$  eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^3$ . Sei  $v \in C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^3)$  und sei  $\mathbf{n}$  ein stetiger Normaleneinheitsvektor auf  $M$  und  $d\sigma$  das Oberflächendifferential. Dann gilt

$$\iint_M (\nabla \times v(x)) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\partial M} v(x) \cdot \boldsymbol{\tau} \, ds,$$

wobei der Tangentialvektor  $\boldsymbol{\tau}$  sich zu  $\mathbf{n}$  links herum dreht. N.B.  $\nabla \times v = \text{rot } v$ .

<sup>1</sup>Carl Friedrich Gauß, 1777 – 1855

<sup>2</sup>George Green, 1793 – 1841

<sup>3</sup>George Gabriel Stokes, 1819 – 1903

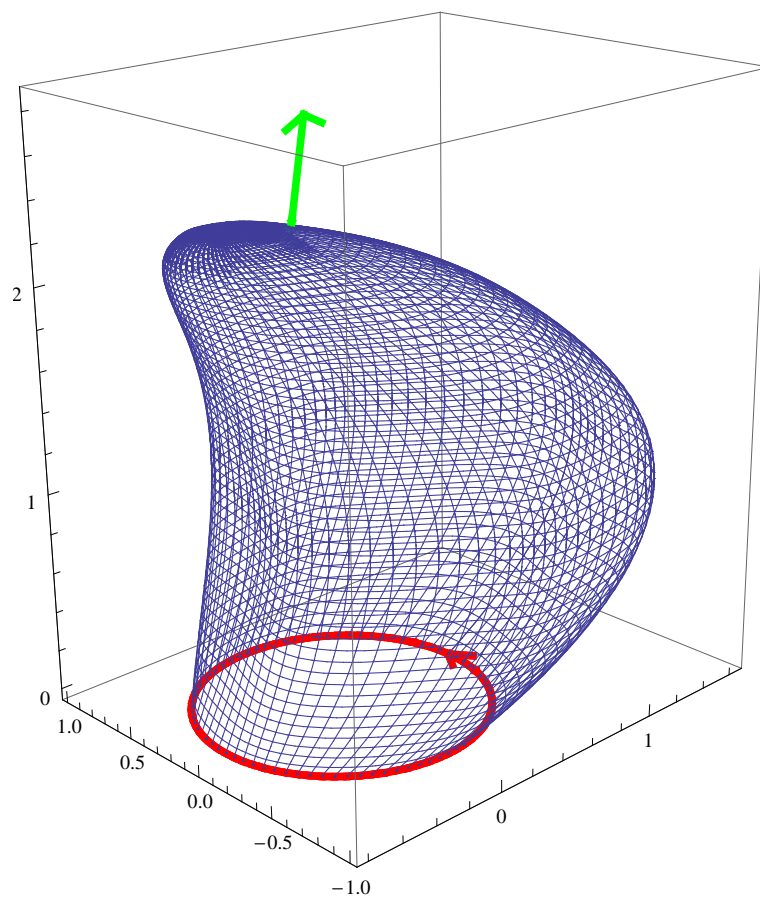


Abbildung 13.3: Eine Abbildung zu Satz 13.19:  $M$  als graues Haarnetz,  $\partial M$  und  $\tau$  in rot und ein  $\mathbf{n}$  in grün.





# Analysis 3, Woche 14

## Differentialformen



### 14.1 Differentialformen zurückziehen und ableiten

#### 14.1.1 Funktionen auf Differentialformen

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, das heißt,  $U$  ist eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Wenn  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar ist, dann gilt für jedes  $p \in U$ , dass  $f'(p) \in M^{m \times n}(\mathbb{R})$ . Hier ist  $f'(p)$  die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $p$ , das heißt

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{\|f(x) - f(p) - f'(p)(x - p)\|}{\|x - p\|} = 0.$$

Die lineare Abbildung  $f'(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist als eine  $m \times n$ -Matrix darstellbar.

Man sagt  $f \in C^\ell(U; \mathbb{R}^m)$ , wenn alle partiellen Ableitungen von  $f$  auf  $U$  der Ordnung kleiner gleich  $\ell$  existieren und stetig sind auf  $U$ .

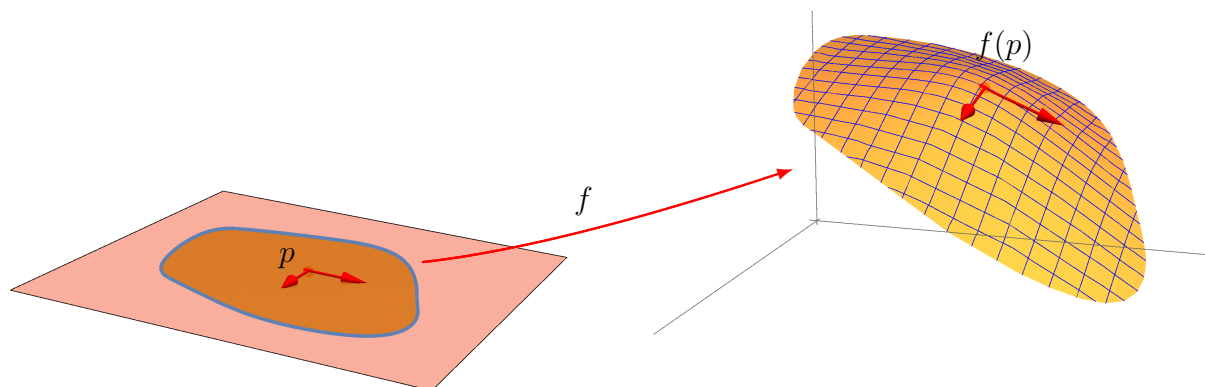


Abbildung 14.1: Links  $U \subset \mathbb{R}^n$  und die Vektoren  $v_1, v_2$ ; rechts  $f(U)$  und die Vektoren  $f'(p)v_1, f'(p)v_2$ .

Weil es in  $\mathbb{R}^n$  oft übersichtlicher ist als auf einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^m$ , werden wir hier eine Möglichkeit vorstellen, wie man eine Form auf  $M$  zurückbringen kann nach einer Form auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 14.1** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^{\ell+1}(U; \mathbb{R}^m)$ . Man definiert für  $\omega \in \Omega_\ell^k(\mathbb{R}^m)$  die **von  $f$  zurückgezogene  $k$ -Form**  $f^*(\omega) \in \Omega_\ell^k(\mathbb{R}^n)$  durch

$$f^*(\omega)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f'(x)v_1, \dots, f'(x)v_k) \quad \text{für } v_i \in \mathbb{R}^n.$$

**Bemerkung 14.1.1** Weil  $f'(x) \in M^{m \times n}$  gilt, folgt für  $v \in \mathbb{R}^n$ , dass  $f'(x)v \subset \mathbb{R}^m$ .

**Bemerkung 14.1.2** Wenn man die Abhängigkeit von der Stelle noch beibehalten möchte, dann müsste man eigentlich schreiben  $f^*(\omega)_{[p]}(v_1, \dots, v_k) = \omega_{[f(x)]}(f'(x)v_1, \dots, f'(x)v_k)$ , denn die Differentialform  $\omega$  an der Stelle  $f(x)$  hängt zusammen mit der Differentialform  $f^*(\omega)$  an der Stelle  $x$ . Deshalb sagt man auch „zurückziehen“.

**Bemerkung 14.1.3** Wenn  $f$  eine Parametrisierung für (einen Teil von) von einer genügend regulären Mannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^m$  ist, dann gilt  $f'(x)v \in T_p M$  für  $p = f(x)$ . Für die Definition von  $f^*(\omega)$  reicht es dann, dass  $\omega \in \Omega_\ell^k(M)$ .

Sei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  die Standardbasis auf  $\mathbb{R}^n$  und sei  $\{dx_1, \dots, dx_n\}$  die zugehörige Standardbasis für  $(\mathbb{R}^n)^*$ . Wenn  $n = m$  gilt, dann folgt

$$f^*(dx_i)(v) = dx_i(f'(p)v) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(p)}{\partial x_j} v_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(p)}{\partial x_j} dx_j(v). \quad (14.1)$$

**Lemma 14.2** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^{\ell+1}(U; \mathbb{R}^m)$ . Dann gilt:

1.  $f^*(\omega + \eta) = f^*(\omega) + f^*(\eta)$  für  $\omega, \eta \in \Omega_\ell^k(\mathbb{R}^m)$ ;
2.  $f^*(g\omega) = (g \circ f) f^*(\omega)$  für  $\omega \in \Omega_\ell^k(\mathbb{R}^m)$  und  $g \in C^0(\mathbb{R}^m)$ ;
3.  $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$  für  $\omega \in \Omega_\ell^{k_1}(\mathbb{R}^m)$  und  $\eta \in \Omega_\ell^{k_2}(\mathbb{R}^m)$ .

**Beweis.** Diese Aussagen folgen sofort aus der Definition. ■

Aus der letzten Aussage und (14.1) folgt für den speziellen Fall  $m = n$ , dass

$$\begin{aligned} f^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n) &= f^*(dx_1) \wedge f^*(dx_2) \wedge \dots \wedge f^*(dx_n) = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_j} dx_j \wedge \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_j} dx_j \wedge \dots \wedge \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_n(p)}{\partial x_j} dx_j = \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Perm}} \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_{\sigma_1}} \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_{\sigma_2}} \dots \frac{\partial f_n(p)}{\partial x_{\sigma_n}} dx_{\sigma_1} \wedge dx_{\sigma_2} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma_n} = \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Perm}} \text{sgn}(\sigma) \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_{\sigma_1}} \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_{\sigma_2}} \dots \frac{\partial f_n(p)}{\partial x_{\sigma_n}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= \det(f'(p)) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Man bemerke, dass  $\det(f'(p))$  der Faktor ist, der, abgesehen vom Vorzeichen, bei dem Trafosatz erscheint.

## 14.1.2 Differentialformen differenzieren

Sei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  die Standardbasis auf  $\mathbb{R}^n$  und sei  $\{dx_1, \dots, dx_n\}$  die zugehörige Standardbasis für  $(\mathbb{R}^n)^*$ .

**Definition 14.3** Sei  $\omega \in \Omega_\ell^k(U)$  mit  $\ell \geq 1$  wie in (12.3):

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad (14.2)$$

Das äußere Differential  $d\omega$  definiert man durch

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} d\omega_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Es folgt  $d\omega \in \Omega_{\ell-1}^{k+1}(U)$ . Das heißt,  $d$  ist ein linearer Operator von  $\Omega_{\ell}^k(U)$  zu  $\Omega_{\ell-1}^{k+1}(U)$ .

**Lemma 14.4** *Es gilt:*

1.  $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$  für  $\omega, \eta \in \Omega_{\ell}^k(U)$  mit  $\ell \geq 1$ ;
2.  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{k_1} \omega \wedge d\eta$  für  $\omega \in \Omega_{\ell}^{k_1}(U)$  und  $\eta \in \Omega_{\ell}^{k_2}(U)$  mit  $\ell \geq 1$ ;
3.  $dd\omega = 0$  für  $\omega \in \Omega_{\ell}^k(U)$  mit  $\ell \geq 2$ ;
4.  $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$  für  $f \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$  und  $\omega \in \Omega_{\ell}^k(U)$  mit  $\ell \geq 1$

**Beweis.** Das erste Ergebnis zeigt man sofort mit Hilfe der Definition.

Nehmen wir Teilmengen  $I, J \subset \{1, \dots, n\}$  und schreiben

$$\begin{aligned} dx_I &= dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} & \text{für } I &= \{i_1, \dots, i_k\}, \\ dx_J &= dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{\ell}} & \text{für } J &= \{j_1, \dots, j_{\ell}\}, \end{aligned}$$

dann bemerke man für das zweite Ergebnis, dass

$$\begin{aligned} d(fd x_I \wedge gdx_J) &= d(fgdx_I \wedge dx_J) = \\ &= (gdf + fdg) \wedge dx_I \wedge dx_J = \\ &= df \wedge dx_I \wedge gdx_J + (-1)^k f dx_I \wedge dg \wedge dx_J = \\ &= d(fd x_I) \wedge gdx_J + (-1)^k f dx_I \wedge d(gdx_J). \end{aligned}$$

Für das dritte Ergebnis bemerke man, dass

$$\begin{aligned} d(d(fd x_I)) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_I = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_I = 0. \end{aligned}$$

Das letztere folgt aus der Definition. Nennen wir  $\{y_1, \dots, y_m\}$  die Koordinaten auf  $\mathbb{R}^m$  und sei  $\omega = g dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k}$ . Es gilt

$$d\omega = dg \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k}$$

und weil

$$\begin{aligned} f^*(\omega)_{[p]}(v^1, \dots, v^k) &= \omega_{[f(p)]}(f'(p)v^1, \dots, f'(p)v^k) \\ &= g_{[f(p)]}(dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k})(f'(p)v^1, \dots, f'(p)v^k) \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
& d\left(f^*(\omega)_{[p]}\right)(v^1, \dots, v^k, v^{k+1}) = \\
& = d(g_{[f(p)]} dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k})(f'(p)v^1, \dots, f'(p)v^k, f'(p)v^{k+1}) \\
& = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial y_i}\right)_{[f(p)]} dy_i \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k}\right)(f'(p)v^1, \dots, f'(p)v^k, f'(p)v^{k+1}) \\
& = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial y_i}\right)_{[f(p)]} (dy_i \circ f'(p)) \wedge (dy_{j_1} \circ f'(p)) \wedge \dots \wedge (dy_{j_k} \circ f'(p))\right)(v^1, \dots, v^k, v^{k+1}) \\
& = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial y_i}\right)_{[f(p)]} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{[p]} dx_j \wedge (dy_{j_1} \circ f'(p)) \wedge \dots \wedge (dy_{j_k} \circ f'(p))\right)(v^1, \dots, v^k, v^{k+1}) \\
& = \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}\right)_{[p]} dx_j \wedge (dy_{j_1} \circ f'(p)) \wedge \dots \wedge (dy_{j_k} \circ f'(p))\right)(v^1, \dots, v^k, v^{k+1}) \\
& = \left(d(g \circ f)_{[p]} \wedge (dy_{j_1} \circ f'(p)) \wedge \dots \wedge (dy_{j_k} \circ f'(p))\right)(v^1, \dots, v^k, v^{k+1}) \\
& = (dg_{[f(p)]} \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k})(f'(p)v^1, \dots, f'(p)v^k, f'(p)v^{k+1}) \\
& = d\omega_{[f(p)]}(f'(p)v^1, \dots, f'(p)v^k, f'(p)v^{k+1}) \\
& = (f^*(d\omega))_{[p]}(v^1, \dots, v^k, v^{k+1})
\end{aligned}$$

und der Buchhalter wäre zufrieden. ■

## 14.2 Geschlossene und exakte Differentialformen

**Definition 14.5** Sei  $\omega \in \Omega_\ell^k(U)$  mit  $\ell \geq 1$ .

- Diese  $k$ -Form  $\omega$  heißt *geschlossen*, wenn  $d\omega = 0$ .
- Diese  $k$ -Form  $\omega$  heißt *exakt*, wenn  $\eta \in \Omega_\ell^{k-1}(U)$  existiert mit  $d\eta = \omega$ .

In Lemma 14.4 findet man, dass  $dd\eta = 0$  gilt. Es folgt also für  $\omega \in \Omega_\ell^k(U)$ :

$$\text{Wenn } \omega \text{ ist exakt, dann ist } \omega \text{ geschlossen.} \quad (14.3)$$

Manchmal sind geschlossene Differentialformen auch exakt. Für die Voraussetzungen brauchen wir eine Bedingung am Gebiet.

**Definition 14.6** Ein Gebiet  $U$  heißt **sternförmig**, wenn es  $a \in U$  gibt derart, dass für jedes  $x \in U$  gilt, dass  $[a, x] \subset U$ .

Man erinnere sich an die Definition eines Intervalls in  $\mathbb{R}^n$ :

$$[a, x] = \{\theta a + (1 - \theta)x; 0 \leq \theta \leq 1\} \text{ für } a, x \in \mathbb{R}^n.$$

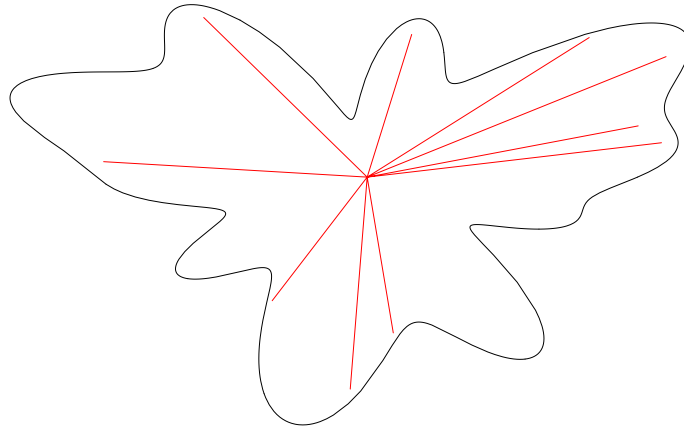


Abbildung 14.2: Ein sternförmiges Gebiet.

**Theorem 14.7 (Das Lemma von Poincaré)** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  sternförmig und offen und  $\ell \geq 1$ . Für jede geschlossene  $k$ -Form  $\omega \in \Omega_\ell^k(U)$  gibt es eine  $(k+1)$ -Form  $\eta \in \Omega_\ell^{k-1}(U)$  mit  $d\eta = \omega$ .

Als Kurzfassung sagt man für  $\omega \in \Omega_1^k(U)$  gilt:

$$\text{Wenn } \omega \text{ ist geschlossen und } U \text{ sternförmig, dann ist } \omega \text{ exakt.} \quad (14.4)$$

**Beweis.** Sei

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Wir definieren

$$p\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell-1} \left( \int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}(tx) dt \right) x_{i_\ell} dx_{i_1} \wedge \dots \\ \dots \wedge dx_{i_{\ell-1}} \wedge dx_{i_{\ell+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Bemerke, dass hier angenommen wird, dass das Intervall  $[0, x]$  innerhalb  $U$  liegt. Das heißt,  $U$  ist sternförmig mit 0 als Zentrum. Nur so ist  $\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}(tx) dt$  wohldefiniert. Bei einem anderen Zentrum benutze man eine zusätzliche Verschiebung.

Es folgt

$$d(p\omega) = \\ = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\ell=1}^k \left( \int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \\ \dots \wedge dx_{i_{\ell-1}} \wedge dx_{i_\ell} \wedge dx_{i_{\ell+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \quad (14.5)$$

$$+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell-1} \left( \int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_{i_\ell} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \\ \dots \wedge dx_{i_{\ell-1}} \wedge dx_{i_{\ell+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad (14.6)$$

Ähnlich gilt für

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$



anders gesagt, wenn man  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subset T_p^*M$  als Standardbasis dual zu  $\{b_1, \dots, b_n\}$  nimmt, dann setzen wir:

$$dM = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \dots \wedge \beta_m.$$

Man bemerke, dass  $dM$  so nur definiert ist an der Stelle  $p$ , weil  $\{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis für  $T_pM$  bildet. An jeder Stelle  $p$  könnte man beliebig eine Basis definieren und beliebige Vorzeichenwechsel bei der Determinante bekommen. Das wäre nicht sehr schön. Wir werden uns bemühen, dass die Abbildung  $p \mapsto dM_p$  eine stetige Funktion ist.

## 14.4 Integration von Differentialformen

Wir nennen  $(\psi, U)$  mit  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $\psi : U \rightarrow M$  eine **reguläre Parametrisierung** der  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^m$ , wenn  $\psi \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$ ,  $\psi(U) = M$ ,  $\psi$  im Innern von  $U$  eindeutig ist und  $\psi|_{U^\circ}$  eine Immersion ist.

**Definition 14.8** Sei  $B := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^n$  ein Block und sei  $\psi \in C^1(B; \mathbb{R}^m)$  eine reguläre Parametrisierung von  $M$ . Für  $\omega \in \Omega_1^n(M)$  gibt es genau ein  $f \in C(B)$  mit

$$\psi^*(\omega) = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \quad (14.8)$$

und man setzt

$$\int_{M, \psi} \omega = \int_B f d\lambda_n.$$

Das rechte Integral ist das  $n$ -dimensionale Lebesgue-Integral.

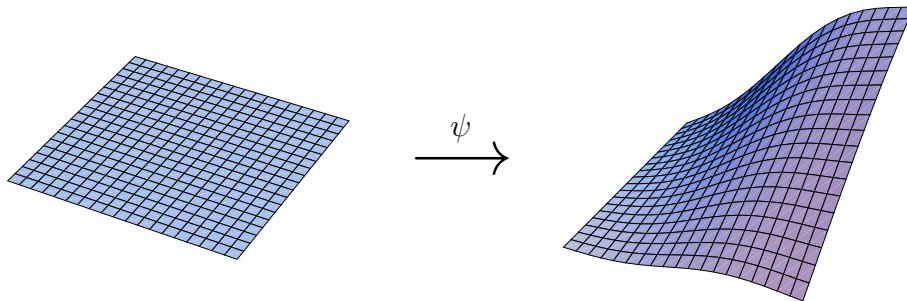


Abbildung 14.3: Das Integral von  $\omega \in \Omega_1^n(M)$  auf  $M$  (rechts) wird definiert durch das Zurückziehen auf  $B$  (links).

**Bemerkung 14.8.1** Dieses Integral hängt ab von der Parametrisierung  $\psi$  und die Anordnung der Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$ . Für das Integral in  $\mathbb{R}^n$  definiert man

$$\int_B f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n := \int_B f d\lambda_n$$

aber nur für die Anordnung  $x_1, \dots, x_n$ . Wenn man Folge vertauscht, kann man einen anderen Wert bekommen. Zum Beispiel sieht man in  $\mathbb{R}^2$ , dass die nächsten beiden Zeilen nicht identisch sind:

$$\begin{aligned} \int_U f dx_2 dx_1 &= \int_U f dx_1 dx_2 = \int_{U, I} f dx_1 \wedge dx_2 \quad \text{und} \\ \int_{U, I} f dx_2 \wedge dx_1 &= \int_{U, I} f (-dx_1 \wedge dx_2) = - \int_{U, I} f dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

**Bemerkung 14.8.2** Diese Abhängigkeit von der Parametrisierung ist nicht so schlimm, als sie aussieht, denn folgendes gilt:

**Lemma 14.9** Seien  $\psi \in C^1(B; \mathbb{R}^m)$  und  $\tilde{\psi} \in C^1(\tilde{B}; \mathbb{R}^m)$  zwei verschiedene reguläre Parametrisierungen. Dann gilt

$$\int_{M, \psi} \omega = \pm \int_{M, \tilde{\psi}} \omega. \quad (14.9)$$

**Beweis.** Wenn beide Parametrisierungen regulär sind, dann ist  $\phi : \tilde{B} \rightarrow B$ , definiert durch  $\phi = \psi^{inv} \circ \tilde{\psi}$ , eine Transformation von  $\tilde{B}$  auf  $B$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^*(\omega)(v_1, \dots, v_n) &= ((\psi \circ \phi)^*(\omega))(v_1, \dots, v_n) \\ &= \omega((\psi \circ \phi)'v_1, \dots, (\psi \circ \phi)'v_n) \\ &= \omega((\psi' \circ \phi)\phi'v_1, \dots, (\psi' \circ \phi)\phi'v_n) \\ &= (f \circ \phi)(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n)(\phi'v_1, \dots, \phi'v_n) \\ &= (f \circ \phi) \det(D\phi)(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n)(v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Das heißt

$$\tilde{\psi}^*(\omega) = (f \circ \phi) \det(D\phi)(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n)$$

und liefert uns

$$\int_{M, \tilde{\psi}} \omega = \int_{\tilde{B}} f \circ \phi \det(D\phi) d\lambda_k$$

Wegen der Transformationsformel für Integrale in  $\mathbb{R}^n$  gilt

$$\int_B f d\lambda_k = \int_{\tilde{B}} f \circ \phi |\det(D\phi)| d\lambda_k,$$

und weil  $\det(D\phi)$  ein festes Vorzeichen hat, folgt (14.9). ■

Wenn  $\psi$  und  $\tilde{\psi}$  eine ähnliche Orientierung haben, das heißt  $\text{sgn}(\det(D\phi)) = 1$ , dann hat man

$$\int_{M, \psi} \omega = \int_{M, \tilde{\psi}} \omega.$$

## 14.5 Bedeutung des Integrals

Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$ . Man möchte, dass

- $\int_{M, \psi} 1 dM$  den  $m$ -dimensionalen Flächeninhalt von  $M$  darstellt, und
- $\int_{M, \psi} g dM$  die  $m$ -dimensionale Masse von  $M$  mit Gewichtung  $g$  darstellt.

**Bemerkung 14.9.1** Beim zweiten Punkt ist  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Gewichtsfunktion, die man Dichte oder Massendichte nennt.



Teilt man  $M$  auf in sehr kleine Teilstücke  $M_i$ , mit  $i \in \{1, \dots, N\}$ , und nimmt man an, dass  $p \mapsto T_p M$  als auch  $g$  stetig sind, so findet man für  $p_i \in M_i$ , dass

$$\int_{M_i, \psi} g \, dM \approx g(p_i) \operatorname{Vol}_m(M_i), \quad (14.10)$$

und wenn man über diese Teile summiert, sollte man die übliche Approximation vom Integral mit Riemann-Summen finden:

$$\int_{M, \psi} g \, dM = \sum_i \int_{M_i, \psi} g \, dM \approx \sum_i g(p_i) \operatorname{Vol}_m(M_i)$$

Stimmt dies überein mit unseren bisherigen Überlegungen?

Wenn  $\psi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $M = \psi(U)$  eine reguläre Parametrisierung ist, kann man  $dM$  zurückziehen auf  $U$  und bekommt

$$\begin{aligned} \psi^*(dM) &= (\beta_1 \circ \psi') \wedge (\beta_2 \circ \psi') \wedge \cdots \wedge (\beta_n \circ \psi') \\ &= f \, d\mathbb{R}^n = f \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Man sollte sich nur noch überlegen, wie die Funktion  $f$  zu definieren wäre. Siehe Abbildung 14.4.

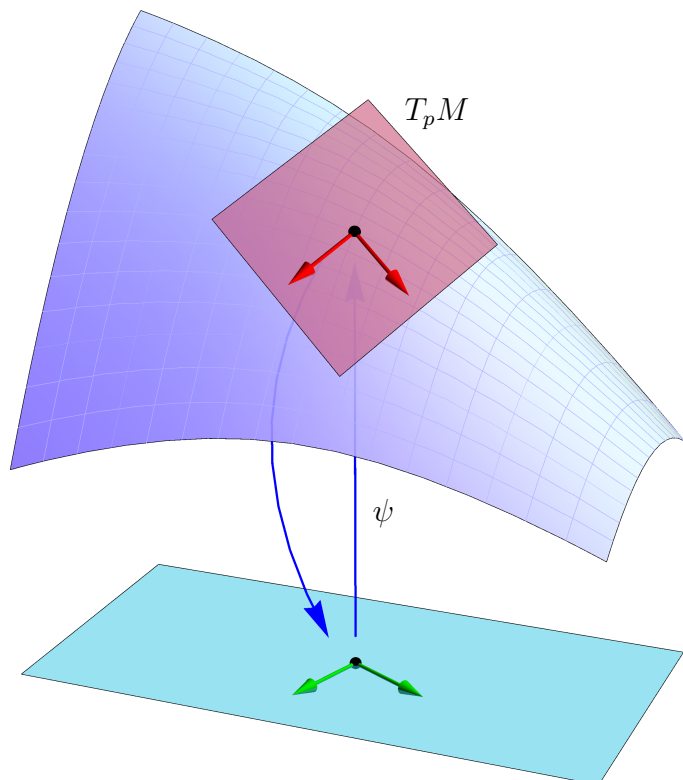


Abbildung 14.4: In rot eine Basis  $\{e_1, e_2\}$  für  $T_p M$  und in grün die Standardbasis in  $\mathbb{R}^2$ ;  $\psi$  geht hinauf und  $\psi^*$  zieht die Differentialform  $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$  zurück zu  $f \, dx_1 \wedge dx_2$ .

Um eine passende  $m$ -Form in (14.11) zu bekommen, anders gesagt, um die Funktion  $f$  zu bestimmen, gehen wir voran wie bei Definition 10.17. Da findet man, dass  $f(x) =$

$\det([\psi']_b)$  passt, mit  $[\psi']_b$  die Vektoren  $\frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\psi}{\partial x_m}$  in  $b$ -Koordinaten geschrieben:

$$\begin{aligned}
 f(y) &= \det([\psi']_b) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \cdot b_1 & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \cdot b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \cdot b_n & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \cdot b_n \end{pmatrix} = \\
 &= \pm \sqrt{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \cdot b_1 & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \cdot b_n \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \cdot b_1 & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \cdot b_n \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \cdot b_1 & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \cdot b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \cdot b_n & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \cdot b_n \end{pmatrix}} = \\
 &= \pm \sqrt{\det \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \cdot b_i \right) \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \cdot b_i \right) & \cdots & \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \cdot b_i \right) \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \cdot b_i \right) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \cdot b_i \right) \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \cdot b_i \right) & \cdots & \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \cdot b_i \right) \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \cdot b_i \right) \end{pmatrix}} = \\
 &= \pm \sqrt{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \end{pmatrix}}. \tag{14.12}
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass  $\frac{\partial\psi}{\partial x_i} \in T_p M$  für  $p = \psi(x)$  und dass  $\{b_1, \dots, b_n\}$  eine Orthogonalbasis für  $T_p M$  bildet.

Diese Formel in (14.12) ist unabhängig von der lokalen Basis  $\{b_1, \dots, b_m\}$ . Das Vorzeichen hängt ab von der Orientierung der Parametrisierung. Nehmen wir an  $f = \det([\psi']_b) > 0$ , und setzen für die Standardkoordinaten in  $\mathbb{R}^n$

$$\int_U F(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_m := \int_U F(x) dx_1 dx_2 \dots dx_m$$

dann kann man das Integral von  $g$  über die Mannigfaltigkeit  $M$  durch Zurückziehen definieren:

$$g dM = (g \circ \psi) \psi^*(dM) = (g \circ \psi) \sqrt{\det \left( \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_j} \right)_{ij} \right)} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_m.$$

Kommen wir zurück auf die Verteilung von  $M$  in Teilstücke (14.10). Wenn  $M_i = \psi(U_i)$  und  $p_i = \psi(q_i)$ , so folgt

$$g(p_i) \text{Vol}_m(M_i) \approx (g \circ \psi)(q_i) \sqrt{\det \left( \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_i}(q_i) \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_j}(q_i) \right)_{ij} \right)} \text{Vol}_m(U_i)$$

und wenn wir über den Index  $i$  summieren, finden wir

$$\begin{aligned}
 \int_{M,\psi} g dM &\approx \sum_i g(p_i) \text{Vol}_m(M_i) \\
 &\approx \sum_i (g \circ \psi)(q_i) \sqrt{\det \left( \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_i}(q_i) \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_j}(q_i) \right)_{ij} \right)} \text{Vol}_m(U_i) \\
 &\approx \int_U (g \circ \psi) \sqrt{\det \left( \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_j} \right)_{ij} \right)} dx_1 dx_2 \dots dx_m.
 \end{aligned}$$

Die Notation  $A \approx B$  bedeutet hier, dass, wenn wir  $M$  als disjunkte Vereinigung von  $\{M_{i,\varepsilon}\}_{i=1}^{N_\varepsilon}$  nehmen, mit  $M_{i,\varepsilon}$  derartig, dass  $\max_i \{|p - \tilde{p}|; p, \tilde{p} \in M_{i,\varepsilon}\} < \varepsilon$ , dann folgt für die zugehörigen Größen  $A = A_\varepsilon$  und  $B = B_\varepsilon$ , dass

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ impliziert } |A_\varepsilon - B_\varepsilon| \rightarrow 0.$$

Das Ergebnis können wir wie folgt beschreiben:

**Theorem 14.10 (Allgemeiner Transformationssatz)** Wenn  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist, die durch  $\psi \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$  mit  $U \subset \mathbb{R}^m$  eindeutig parametrisiert wird, dann findet man für  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ , dass

$$\int_{M,\psi} g \, dM = \int_U (g \circ \psi) \sqrt{\det \left( \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)_{ij} \right)} dx_1 dx_2 \dots dx_m.$$

Hier ist  $dM$  eine Standardvolumenform auf der  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  mit der gleichen „Orientierung“ wie  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$  in  $\mathbb{R}^m$ .

**Lemma 14.11** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^m$  und sei  $dM$  die Volumenform. Sei  $N \subset M$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Nehme an  $\mathbf{n}(x) \in T_p M$  ist ein Normaleneinheitsvektor zu  $T_p N$ , das heißt  $\mathbf{n}(x) \cdot \tau = 0$  für alle  $\tau \in T_p N$  und  $\mathbf{n}(x) \cdot \mathbf{n}(x) = 1$ . Dann ist

$$dN = (\mathbf{n} \lrcorner dM)|_{TN}$$

eine Volumenform auf  $N$ .

**Bemerkung 14.11.1** Wenn man eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  einschränkt, bekommt man meistens einen Rand, der eine  $m-1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Dieses Lemma gibt eine Möglichkeit, beide zugehörigen Volumenformen zu vergleichen.

**Bemerkung 14.11.2** Auch  $-\mathbf{n}(x)$  hat die gleichen Eigenschaften und die zugehörige Volumenform wäre  $-(\mathbf{n} \lrcorner dM)|_{TM}$ . Wenn man keine Orientierung festlegt, hat man a-priori genau diese zwei Möglichkeiten. Eigentlich gibt es immer zwei Volumenformen, die sich dann aber auch nur unterscheiden durch das Vorzeichen.

**Bemerkung 14.11.3** Wenn  $N \subset M$  eine  $k$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist mit  $k < n$ , dann gibt es  $n-k$  Vektoren  $\mathbf{n}_1(x), \dots, \mathbf{n}_{n-k}(x)$ , die eine orthogonale Basis für  $T_p N$  erweitern zu einer Basis für  $T_p M$  und  $dN = (\mathbf{n}_1 \lrcorner \mathbf{n}_2 \lrcorner \dots \lrcorner \mathbf{n}_{n-k} \lrcorner dM)|_{TN}$ .

**Beweis.** Sei  $\{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$  eine orthonormale Basis für  $T_p N$ . Dann kann man diese Basis mit  $\mathbf{n}(x)$  erweitern und findet mit  $\{\mathbf{n}(x), b_1, \dots, b_{n-1}\}$  eine orthonormale Basis für

$T_p N$ . Es gilt für  $v^i \in T_p N$  mit  $i = 1, \dots, n-1$ , dass

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{n} \lrcorner dM)(v_1, \dots, v_{n-1}) &= dM(\mathbf{n}, v_1, \dots, v_{n-1}) = \\
 &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} & v_1 \cdot \mathbf{n} & \cdots & v_{n-1} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \cdot b_1 & v_1 \cdot b_1 & \cdots & v_{n-1} \cdot b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{n} \cdot b_{m-1} & v_1 \cdot b_{m-1} & \cdots & v_{n-1} \cdot b_{m-1} \end{pmatrix} = \\
 &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_1 \cdot b_1 & \cdots & v_{n-1} \cdot b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & v_1 \cdot b_{n-1} & \cdots & v_{n-1} \cdot b_{n-1} \end{pmatrix} = \\
 &= \det \begin{pmatrix} v_1 \cdot b_1 & \cdots & v_{n-1} \cdot b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1 \cdot b_{n-1} & \cdots & v_{n-1} \cdot b_{n-1} \end{pmatrix} = dN(v_1, \dots, v_{n-1}).
 \end{aligned}$$

■

## 14.6 Grad, Div und Rot auf Mannigfaltigkeiten

In diesem Paragraph ist  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^m$  und  $dM$  eine zugehörige Standardvolumenform.

**Definition 14.12** Für ein Vektorfeld  $v : M \rightarrow TM$  wird **die zum Vektorfeld duale Differentialform**  $\omega_v$  vom Grad 1 definiert durch

$$*\omega_v = v \lrcorner dM. \quad (14.13)$$

**Bemerkung 14.12.1** Weil der Hodge-Operator bijektiv ist, ist diese Definition eindeutig. Umgekehrt gilt auch, dass es zu jeder 1-Form  $\omega$  genau ein Vektorfeld  $v : M \rightarrow TM$  gibt derart, dass  $v \lrcorner dM = *\omega$  gilt.

Für  $M = \mathbb{R}^n$  mit der Standardbasis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  und mit  $\{dx_1, \dots, dx_n\}$  als der dazugehörigen Dualbasis, findet man

$$\begin{aligned}
 v \lrcorner dM &= (v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n) \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
 &= v_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n - v_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n + \cdots + (-1)^{n-1} v_n dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} v_i \bigwedge_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} dx_j,
 \end{aligned}$$

wenn wir die folgende Notation verwenden:

$$\bigwedge_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} dx_j = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Weil  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{n-i}$  gilt für

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & \dots & n-1 & n \\ 1 & \dots & i-1 & i+1 & \dots & n & i \end{pmatrix},$$

findet man

$$* \bigwedge_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} dx_j = (-1)^{n-i} dx_i,$$

und folgt

$$\omega_v = ** \omega_v = *(v \lrcorner dM) = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + \dots + v_n dx_n. \quad (14.14)$$

**Definition 14.13** Für  $f \in C^1(M; \mathbb{R})$  wird der **Gradient**  $\text{grad } f : M \rightarrow TM$  definiert durch

$$\omega_{\text{grad } f} := df.$$

Die Form  $df$  hat Grad 1. Für den Standardfall  $M = \mathbb{R}^n$ , wie auch oben, folgt

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

und mit (14.14) findet man den Gradienten für den Standardfall wie in Definition 13.14, nämlich

$$\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

**Definition 14.14** Für  $v \in C^1(M; TM)$  wird die **Divergenz**  $\text{div } v : M \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$(\text{div } v) dM := d(v \lrcorner dM).$$

Weil  $dM$  eine  $n$ -Form ist, ist  $v \lrcorner dM$  eine  $(n-1)$ -Form und  $d(v \lrcorner dM)$  wieder eine  $n$ -Form. Weil die äußeren  $n$ -Formen auf  $T_x^*M$  mit  $n$ -dimensionalem  $M$  an sich einen ein-dimensionalen Raum bilden, gibt es genau eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $d(v \lrcorner dM) = f dM$  und diese Funktion nennt man  $\text{div } v$ .

Wenn  $M = \mathbb{R}^n$  findet man auch hier die Standarddivergenz zurück:

$$\begin{aligned} d(v \lrcorner dM) &= d \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} v_i \bigwedge_{j \neq i, 1 \leq j \leq n} dx_j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{k=1}^n \frac{dv_i}{dx_k} dx_k \wedge \bigwedge_{j \neq i, 1 \leq j \leq n} dx_j \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{dv_i}{dx_i} dx_i \wedge \bigwedge_{j \neq i, 1 \leq j \leq n} dx_j = \left( \sum_{i=1}^n \frac{dv_i}{dx_i} \right) \bigwedge_{j=1}^n dx_j \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \frac{dv_i}{dx_i} \right) dM = (\text{div } v) dM. \end{aligned}$$

**Definition 14.15** Sei  $m = 3$  (also  $M$  ist eine drei-dimensionale Mannigfaltigkeit) und  $v \in C^1(M; TM)$ . Dann wird die **Rotation**<sup>2</sup>  $\text{rot } v : M \rightarrow TM$  definiert durch

$$*\omega_{\text{rot } v} := d\omega_v.$$

Nehme  $M = \mathbb{R}^3$  mit der Standardbasis  $\{e_1, e_2, e_3\}$  und  $M^*$  mit der Standardbasis  $\{dx_1, dx_2, dx_3\}$ . Dann folgt via (14.14) für  $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ , dass

$$\begin{aligned} d\omega_v &= d(v_1dx_1 + v_2dx_2 + v_3dx_3) = dv_1 \wedge dx_1 + dv_2 \wedge dx_2 + dv_3 \wedge dx_3 = \\ &= \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_1 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_2 + \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_3 \\ &= \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 - \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) dx_1 \wedge dx_3 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Mit Beispiel 13.13 findet man

$$\begin{aligned} \omega_{\text{rot } v} &= **\omega_{\text{rot } v} = *d\omega_v = \\ &= \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) dx_1 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) dx_2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dx_3 \end{aligned}$$

und es folgt  $\text{rot } v$  wie in Definition 13.14.

**Lemma 14.16** Sei  $n = 3$  (also  $M \subset \mathbb{R}^m$  ist eine drei-dimensionale Mannigfaltigkeit) und  $f \in C^2(M; \mathbb{R})$  und  $v \in C^2(M; TM)$ . Dann gilt

1.  $\text{div}(\text{rot } v) = 0$ ;
2.  $\text{rot}(\text{grad } f) = (0, 0, 0)$ .

**Beweis.** Man verwende das dritte Ergebnis von Lemma 14.4 und findet:

$$\text{div}(\text{rot } v) dM = d(\text{rot } v \lrcorner dM) = d(*\omega_{\text{rot } v}) = dd\omega_v = 0.$$

Das zweite Ergebnis folgt aus  $*\omega_{\text{rot}(\text{grad } f)} = d\omega_{\text{grad } f} = ddf = 0$ . ■

**Lemma 14.17** Sei  $U$  eine sternförmige offene Menge von  $\mathbb{R}^3$  und  $v \in C^1(U; \mathbb{R}^3)$ .

1. Wenn  $\text{rot } v = 0$ , dann existiert  $f \in C^1(U; \mathbb{R})$  mit  $v = \text{grad } f$ ;
2. Wenn  $\text{div } v = 0$ , dann existiert  $w \in C^1(U; \mathbb{R}^3)$  mit  $v = \text{rot } w$ .

**Beweis.** 1. Wenn  $\text{rot } v = 0$ , hat man  $d\omega_v = 0$  und  $\omega_v$  ist geschlossen. Poincaré sagt, dass eine Funktion  $f$  existiert mit  $df = \omega_v$ . Es gilt  $v = \text{grad } f$ .

2. Wegen der Annahme folgt  $d(v \lrcorner dM) = (\text{div } v) dM = 0$ . Dann ist die 2-Form  $v \lrcorner dM$  geschlossen und mit Poincaré ist  $v \lrcorner dM$  exakt und es gibt eine 1-Form  $\omega$  derart, dass  $d\omega = v \lrcorner dM$ . Für eine differenzierbare 1-Form gibt es  $w \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  derart, dass  $\omega = \omega_w$ . Weil

$$*\omega_{\text{rot } w} = d\omega_w = v \lrcorner dM = *\omega_v$$

gilt, folgt  $\omega_{\text{rot } w} = \omega_v$  und  $v = \text{rot } w$ . ■

<sup>2</sup>Auf Englisch schreibt man  $\nabla \times v = \text{curl } v$ .

# Analysis 3, Woche 15

## Gauß und Stokes



### 15.1 Integrale und Randintegrale

Wenn  $M$   $n$ -dimensional ist, und durch  $\psi$  wie in Definition 14.8 parametrisiert wird, also  $\psi(B) = M$ , dann ist  $\psi(\partial B)$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Menge. Wir wollen für  $\omega \in \Omega_1^{n-1}(M)$  ein ‘orientiertes’ Randintegral definieren.

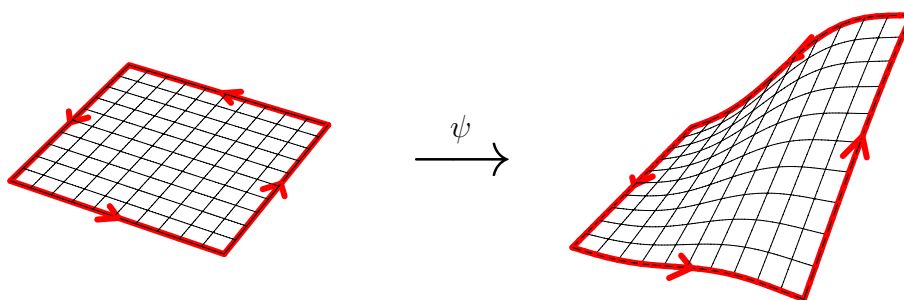


Abbildung 15.1: Das Integral von  $\omega \in \Omega_1^{n-1}(M)$  auf ‘ $\partial M$ ’ wird mit Vorzeichen definiert.

**Definition 15.1** Sei  $B := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$  ein Block und sei  $\psi \in C^1(B; \mathbb{R}^m)$  eine reguläre Parametrisierung von  $M$ . Man setzt

$$\begin{aligned} B_{(i,0)} &= [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times \{a_i\} \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \dots \times [a_n, b_n], \\ B_{(i,1)} &= [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times \{b_i\} \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \dots \times [a_n, b_n]. \end{aligned}$$

Sei  $\psi_{(i,j)} = \psi|_{B_{(i,j)}}$  und  $M_{(i,j)} = \psi(B_{(i,j)})$ . Dann definiert man für  $\omega \in \Omega_1^{n-1}(M)$

$$\int_{\partial(M,\psi)} \omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \left( \int_{M_{(i,1),\psi_{(i,1)}}} \omega - \int_{M_{(i,0),\psi_{(i,0)}}} \omega \right). \quad (15.1)$$

Für mehr allgemeine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten  $M$ , die sich parametrisieren lassen durch endlich viele solchen Blöcke, kann man diese Definition anwenden für die Summe der Blöcke. Dann sollen jedoch die folgenden Bedingungen erfüllt sein.

**Bedingung 15.2** Es gibt endlich viele reguläre Parametrisierungen  $\{(\psi_i, U_i); 1 \leq i \leq N\}$  mit  $U_i \subset \mathbb{R}^n$  offen und derart, dass es abgeschlossene Blöcke  $B_i \subset U_i$  gibt mit

- $\bigcup_{1 \leq i \leq N} \psi_i(B_i) = M,$

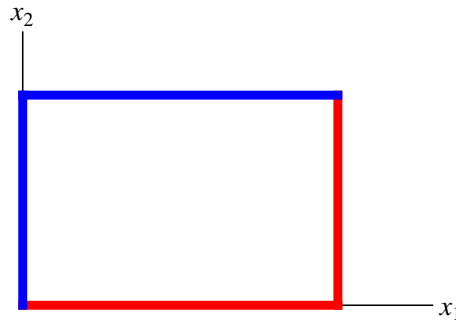


Abbildung 15.2: (15.1) in  $\mathbb{R}^2$ : Randintegrale mit positivem Vorzeichen in rot; mit negativem in blau.

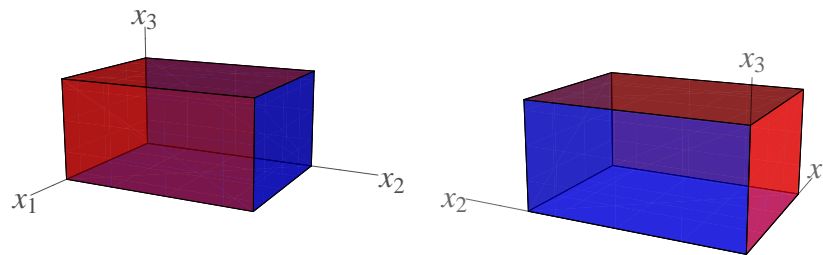


Abbildung 15.3: (15.1) in  $\mathbb{R}^3$ : Randintegrale mit positivem Vorzeichen in rot; mit negativem in blau.

- $\psi_i(B_i^\circ) \cap \psi_j(B_j^\circ)$  disjunkt, und,
- wenn  $\psi_i(U_i) \cap \psi_j(U_j) \neq \emptyset$ , dann soll für  $\phi_i^j = \psi_i \circ \psi_j^{inv}$  gelten, dass

$$\text{sgn}(\det(D\phi_i^j)) = 1.$$

Diese letzte Bedingung bedeutet, dass die Orientierung sich nicht ändert.

**Definition 15.3** Eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  heißt **orientierbar**, wenn sie eine stetige Differentialform vom Grad  $m$  besitzt, die nirgends verschwindet.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, dann definiert man für  $\omega \in \Omega_1^k(M)$  mit  $M_i = \psi_i(B_i)$

$$\int_{M, \{\psi_i\}_{i=1}^N} \omega = \sum_{i=1}^N \int_{M_i, \psi_i} \omega. \quad (15.2)$$

Ein Integral wie in (15.2) über das Möbiusband ist so nicht wohldefiniert.

Für  $\omega \in \Omega_1^{n-1}(M)$  definiert man

$$\int_{\partial(M, \{\psi_i\}_{i=1}^N)} \omega = \sum_{i=1}^N \int_{\partial(M_i, \psi_i)} \omega. \quad (15.3)$$

Man soll bemerken, dass bei anliegenden  $M_i$  und  $M_j$  das Integral über den gemeinsamen Rand wegfällt, da dieses Randteil mit entgegengesetzten Vorzeichen aufgeführt wird.

Man könnte denken, dass man mit Blöcken nur eckige Teile von Mannigfaltigkeiten erreichen kann. An Hand von Abbildung 15.5 sieht man, dass dies nicht so ist.



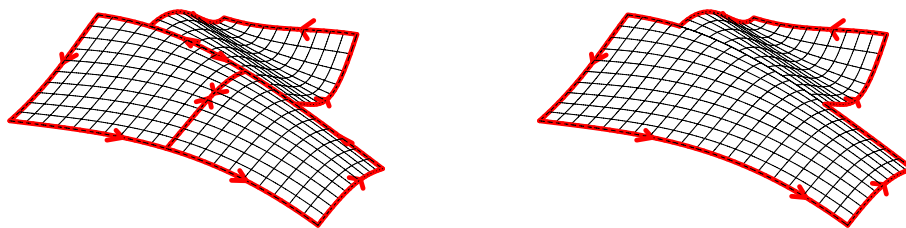


Abbildung 15.4: Gemeinsame Ränder von  $M_i$  und  $M_j$  liefern keinen Beitrag im Randintegral, weil sie entgegengesetzte Vorzeichen haben.

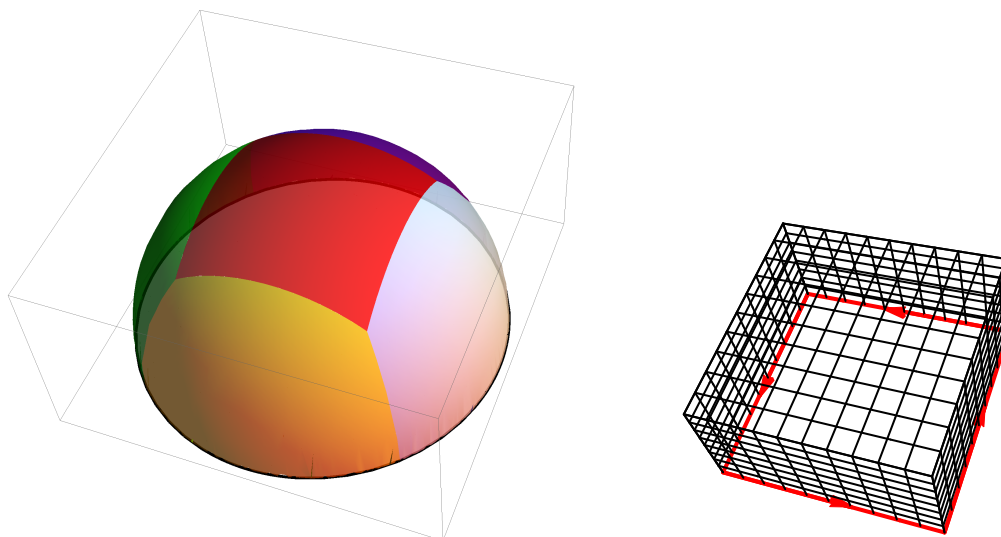


Abbildung 15.5: Eine halbe Sphäre kann man mit 5 „Rechtecken“ eindeutig parametrisieren.

## 15.2 Beweis des Stokesschen Satzes

**Theorem 15.4 (Stokes (fast) allgemein)** Sei  $\omega \in \Omega_1^{n-1}(M)$  und sei  $\{(\psi_i, B_i); 1 \leq i \leq N\}$  eine eindeutige Parametrisierung für die  $k$ -dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit  $M = \bigcup_{1 \leq i \leq N} \psi_i(B_i)$ . Dann gilt

$$\int_{M, \{\psi_i\}} d\omega = \int_{\partial(M, \{\psi_i\})} \omega.$$

**Bemerkung 15.4.1** Eigentlich sollte man  $\int_{\partial(M, \{\psi_i\})} \omega|_{TM}$  statt  $\int_{\partial(M, \{\psi_i\})} \omega$  schreiben.

**Beweis.** Es reicht, wenn wir diesen Satz beweisen für eine Mannigfaltigkeit  $M$ , die nur eine Parametrisierung  $(\psi, B)$  braucht. Für die Form  $\omega$  gibt es  $f_1, \dots, f_n \in C^1(B; \mathbb{R})$  derart, dass

$$\psi^*(\omega) = \sum_{i=1}^n f_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Man erhält unter Verwendung von  $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ , also auch  $dx_i \wedge dx_i = 0$ , dass

$$\begin{aligned} \psi^*(d\omega) &= d(\psi^*(\omega)) = \sum_{i=1}^n df_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Setzen wir  $B = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ,

$$\tilde{B}_i = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \cdots \times [a_n, b_n]$$

und  $dx'_i = dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n$ . Es folgt mit Fubini und dem Hauptsatz der Integralrechnung, dass

$$\begin{aligned} \int_{M,\psi} d\omega &= \int_B \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) d\lambda_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \int_{\tilde{B}_i} \left( \int_{a_i}^{b_i} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_i \right) dx'_i = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \int_{\tilde{B}_i} (f(x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n)) dx'_i = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \left( \int_{M_{(i,1),\psi} \omega} - \int_{M_{(i,0),\psi} \omega} \right) = \int_{\partial(M,\psi)} \omega. \end{aligned}$$

Da wir eine eindeutige Parametrisierung  $M = \bigcup_{1 \leq i \leq N} \psi_i(B_i)$  angenommen haben, ist man fertig, wenn man die Idee in Abbildung 15.4 verstanden hat. ■

Der Satz gilt auch für nette Mannigfaltigkeiten, die sich nicht unbedingt direkt mit Blöcken parametrisieren lassen, sondern noch eine zusätzliche Approximation brauchen. Durch das Zurückziehen ist man in  $\mathbb{R}^n$  und dann kommt man weiter mit dem üblichen Lebesgue-Integral.

## 15.3 Beweis des Integralsatzes von Gauß

Der Satz von Gauß in  $\mathbb{R}^n$  (Satz 13.17) sagt folgendes:

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt und sei  $\partial U \in C^1$ . Sei  $v \in C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^n)$  und sei  $n$  der auswärts gerichtete Normaleneinheitsvektor auf  $\partial U$  und  $d\sigma = d(\partial U)$  das Oberflächendifferential. Dann gilt

$$\int_U \nabla \cdot v \, d\mathbb{R}^n = \int_{\partial U} v \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

**Beweis des Satzes 13.17.** Fassen wir  $U \subset \mathbb{R}^n$  auf als Mannigfaltigkeit. Weil

$$v \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} v_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

gilt, findet man

$$\begin{aligned}
 & d(v \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n = \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n = \\
 &= (\nabla \cdot v) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.
 \end{aligned}$$

Es folgt mit Stokes, dass

$$\begin{aligned}
 \int_U \nabla \cdot v \, d\lambda &= \int_{U,I} \nabla \cdot v \, d\mathbb{R}_n = \int_{U,I} d(v \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = \\
 &= \int_{\partial(U,I)} (v \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)|_{T_x(\partial U)}.
 \end{aligned}$$

Wenn man den auswärtigen Normaleneinheitsvektor an der Stelle  $x$  mit  $\mathbf{n}(x)$  bezeichnet, hat man

$$v = (v \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + w$$

mit  $w$  tangential an  $\partial U$ . Es folgt

$$\begin{aligned}
 & (v \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)|_{T_x(\partial U)} = \\
 &= (v \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)|_{T_x(\partial U)} + (w \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)|_{T_x(\partial U)}.
 \end{aligned}$$

Man bedenke, dass  $n$  Vektoren  $\{w, u_1, \dots, u_{n-1}\}$  in einem  $(n-1)$ -dimensionalen Teilraum, hier der Tangentialraum  $T_x(\partial U)$ , linear abhängig sind, und dann folgt aus der Antisymmetrie der Differentialform, dass

$$(w \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)(u_1, \dots, u_{n-1}) = (dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)(w, u_1, \dots, u_{n-1}) = 0.$$

Man findet

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial(U,I)} (v \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)|_{T_x(\partial U)} = \\
 &= \int_{\partial(U,I)} (v \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)|_{T_x(\partial U)} = \int_{\partial U} (v \cdot \mathbf{n}) d(\partial U). \quad (15.4)
 \end{aligned}$$

Mehr allgemeiner zeigt man:

$$\int_{(U,\psi)} \operatorname{div} v \, dU = \int_{\partial(U,\psi)} (v \cdot \mathbf{n}) d(\partial U).$$

Hier kann  $U$  sogar eine Mannigfaltigkeit sein. ■

Für Korollar 13.18 bemerke man, dass

$$\operatorname{div}(g \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} g) = (\Delta f) g - f (\Delta g).$$

Es folgt, dass

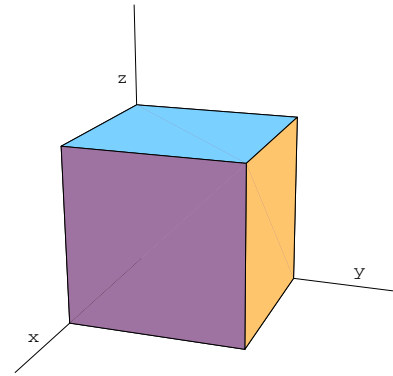
$$\begin{aligned}
 & \int_U ((\Delta f) g - f (\Delta g)) \, d\lambda = \int_U \operatorname{div}(g \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} g) \, d\mathbb{R}_n = \\
 & \int_U (g \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} g) \cdot \mathbf{n} d(\partial U) = \int_{\partial U} \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} g - f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right) d(\partial U).
 \end{aligned}$$

**Beispiel 15.5** Sei

$$K = \{(x, y, z); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \text{ und } 0 \leq z \leq 1\}$$

und  $v(x, y, z) = (3x, xy, 2xz)$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_K (\nabla \cdot v) dV &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 (3 + x + 2x) dz dy dx = \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 (3 + 3x) dy dx = \int_{x=0}^1 (3 + 3x) dx = 4\frac{1}{2} \end{aligned}$$



und

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} (v \cdot \mathbf{n}) d\sigma &= \left( \int_{\text{Links}} + \int_{\text{Vorne}} + \int_{\text{Rechts}} + \int_{\text{Hinten}} + \int_{\text{Oben}} + \int_{\text{Unten}} \right) (v \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{z=0}^1 \begin{pmatrix} 3x \\ 0 \\ 2xz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dx dz + \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 \begin{pmatrix} 3 \\ y \\ 2z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dy dz + \\ &+ \int_{x=0}^1 \int_{z=0}^1 \begin{pmatrix} 3x \\ x \\ 2xz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx dz + \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dy dz + \\ &+ \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \begin{pmatrix} 3x \\ xy \\ 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx dy + \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \begin{pmatrix} 3x \\ xy \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx dy = \\ &= \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 3 dy dz + \int_{x=0}^1 \int_{z=0}^1 x dx dz + \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 2x dx dy = 3 + \frac{1}{2} + 1 = 4\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Der Satz von Gauß hat es also richtig vorhergesagt.

## 15.4 Beweis des klassischen Stokesschen Satzes

Die klassische Formulierung des Satzes von Stokes lautet:

Sei  $M$  eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^3$ . Sei  $v \in C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^3)$  und sei  $\mathbf{n}$  ein stetiger Normaleneinheitsvektor auf  $M$  und  $d\sigma$  das Oberflächendifferential. Dann gilt

$$\iint_M (\nabla \times v) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\partial M} v \cdot \boldsymbol{\tau} ds,$$

wobei der Tangentialvektor  $\boldsymbol{\tau}$  sich zu  $\mathbf{n}$  links herum dreht.

**Beweis von Satz 13.19.** Man hat

$$\nabla \times v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Definieren wir die Differentialform  $\omega$  von Grad 1 durch

$$\omega = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3 \tag{15.5}$$



Abbildung 15.6: In der klassischen Fassung des Stokesschen Satzes verhalten sich der Normalenvektor (in grün) und die tangentielle Richtung (in rot) wie Daumen und Finger der rechten Hand. Siehe auch Abbildung 13.3.

dann folgt

$$\begin{aligned}
 d\omega &= \frac{\partial v_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \\
 &\quad + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 = \\
 &= \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 + \\
 &\quad + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2.
 \end{aligned} \tag{15.6}$$

Wie in (15.4) hat man für ein Vektorfeld  $z = (z_1, z_2, z_3)^T$ , dass

$$\iint_M z \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_M z_1 dx_2 \wedge dx_3 + z_2 dx_3 \wedge dx_1 + z_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

So findet man für  $\omega$  aus (15.5), also mit  $d\omega$  wie in (15.6), aus dem allgemeinen Satz von Stokes, dass mit passender Parametrisierung gilt

$$\begin{aligned}
 \iint_M (\nabla \times v) \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \int_{M,\psi} d\omega = \int_{\partial(M,\psi)} \omega = \\
 &= \int_{\partial(M,\psi)} v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3 = \int_{\partial M} v \cdot \boldsymbol{\tau} ds.
 \end{aligned}$$

Die Parametrisierung für den zweiten Schritt führt dazu, dass der Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n}$  und der tangentielle Vektor  $\boldsymbol{\tau}$  eine feste Orientierung haben. ■

**Beispiel 15.6** Sei  $v(x, y, z) = (y^2, x, z^2)$  und

$$M = \{(x, y, z); z = x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Wir nehmen  $\mathbf{n}$  nach oben gerichtet und berechnen

$$\iint_M (\nabla \times v) \cdot \mathbf{n} d\sigma \text{ und } \int_{\partial M} v \cdot \boldsymbol{\tau} ds.$$

Zum ersten Integral brauchen wir

$$\nabla \times v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 - 2y \end{pmatrix}$$

und  $\mathbf{n}$ . Parametrisieren wir  $M$  durch  $\psi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$  folgt

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix};$$

$\frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y}$  ist ein Vektor orthonormal auf  $\partial M$ . Normalisieren und die richtige Richtung nehmen führt einen zu

$$\mathbf{n} = \frac{\pm \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt<sup>1</sup>

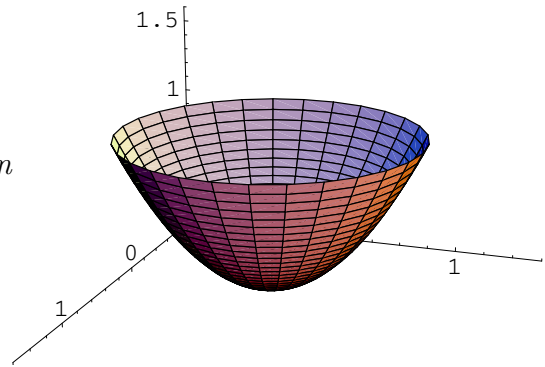
$$\iint_M (\nabla \times v) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_M \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 - 2y \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} d\sigma =$$

<sup>1</sup>Beim Normalisieren fanden wir  $(\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1})^{-1}$  und bei  $d\sigma$  den Faktor  $\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$ . Das so etwas kein Zufall ist, sieht man, wenn man zurück geht zu der Ableitung von  $\sqrt{\det \left( \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)_{ij} \right)}$ . Es ist dann auch einfacher  $\mathbf{n} d\sigma$  gemeinsam zu berechnen:

$$\mathbf{n} d\sigma \text{ "=" } \pm \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy. \quad (15.7)$$

Die Gänsefüßchen stehen da, weil man hier ein Integral über eine Mannigfaltigkeit zurückzieht auf das Parametrisierungsgebiet. Genauer wäre zu schreiben, mit  $v$  ein Vektorfeld auf  $M$ , dass

$$\int_{M=\psi(U)} v \cdot \mathbf{n} d\sigma = \pm \int_U (v \circ \psi(x, y)) \cdot \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy.$$



$$\begin{aligned}
&= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1-2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1+4x^2 & 4xy \\ 4xy & 1+4y^2 \end{pmatrix}} dx dy = \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1-2y) dx dy = \pi.
\end{aligned}$$

Wir finden auch mit  $(x, y, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 1)$ , dass

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} v \cdot \boldsymbol{\tau} ds &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} (\sin \varphi)^2 \\ \cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi = \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} (-(\sin \varphi)^3 + (\cos \varphi)^2) d\varphi = \pi.
\end{aligned}$$

Stokes hätte nur einmal gerechnet.