

# Analysis 3, Woche 5

## Lebesgue-Integral



### 5.1 Definition des Lebesgue-Integrals

#### 5.1.1 Für einfache Funktionen

Wenn wir  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten, nehmen wir an, dass  $X \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ .

**Definition 5.1** Eine Funktion  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$  heißt **einfach**, wenn  $f(X)$  abzählbar ist.

**Bemerkung 5.1.1** Eine Treppenfunktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit endlich vielen Stufen, so wie sie für Riemann-Integrale verwendet wurden, ist einfach. In dem Fall ist  $f([a, b])$  sogar endlich.

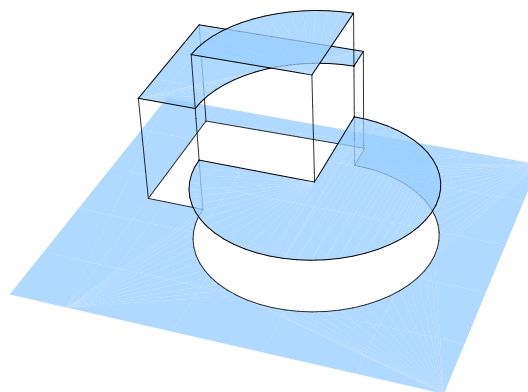
Wenn die Bildmenge unendlich abzählbar ist, sagen wir  $f(X) = \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $y_i \in [-\infty, \infty]$ , dann bedeutet das, dass  $X$  die disjunkte Vereinigung der Urbilder  $\{f^{-1}(y_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  ist. Setzen wir  $A_i := f^{-1}(y_i)$ , dann folgt

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \mathbf{1}_{A_i}. \quad (5.1)$$

Die Funktion  $\mathbf{1}_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Man nennt  $\mathbf{1}_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die **Indikatorfunktion von**, oder manchmal auch charakteristische Funktion zu,  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Statt  $\mathbf{1}_A$  wird übrigens auch  $\chi_A$  verwendet.



**Beispiel 5.2** In der Abbildung findet man eine Darstellung von

$$f = \mathbf{1}_K + 2 \mathbf{1}_R$$

mit  $K$  einer Kreisscheibe und  $R$  einem Rechteck. Für diese Funktion möchte man das Integral definieren durch

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda = 1 \operatorname{Vol}_{\mathbb{R}^2}(K) + 2 \operatorname{Vol}_{\mathbb{R}^2}(R).$$

Übrigens gilt auch, dass  $f = \mathbf{1}_{K \setminus R} + 2 \mathbf{1}_{R \setminus K} + 3 \mathbf{1}_{R \cap K}$ . Man findet die gleiche Zahl durch

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda = 1 \operatorname{Vol}_{\mathbb{R}^2}(K \setminus R) + 2 \operatorname{Vol}_{\mathbb{R}^2}(R \setminus K) + 3 \operatorname{Vol}_{\mathbb{R}^2}(R \cap K).$$

Weil  $K \setminus R = f^{-1}(1)$ ,  $R \setminus K = f^{-1}(2)$  und  $R \cap K = f^{-1}(3)$ , folgt, dass  $f$  eine einfache Funktion ist.

Die Idee, wie man das Integral definiert, kann man verwenden für allgemeinere Gebiete, wenn man das Volumen durch das Lebesgue-Maß ersetzt. Für einfache Funktionen  $f$  bedeutet dies, dass die Mengen, für die  $f$  konstant ist, Lebesgue-Mengen sein müssen. Für einfache Funktionen mit  $f(X) = \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  und  $A_i := f^{-1}(y_i)$  gilt nämlich, dass

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \mathbf{1}_{A_i}(x), \quad (5.2)$$

und würde gerne

$$\int_X f \, d\lambda = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \lambda(A_i) \quad (5.3)$$

als Integral definieren.

Es reicht jedoch nicht, dass  $\lambda(A_i)$  definiert ist, das heißt,  $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$  gilt, sondern auch, dass die Summe in (5.3) konvergiert. Für  $y_i \geq 0$  liefert die Konvergenz in  $[0, \infty]$ , einschließlich  $\infty$ , kein Probleme und daher definiert man allererst das Integral für nicht-negative einfache Funktionen.

**Definition 5.3** Für eine nichtnegative **einfache** Funktion  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  der Form

$$f = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \mathbf{1}_{A_i},$$

mit  $A_i \in \mathcal{L}$ -messbar für alle  $i \in \mathbb{N}$ , definiert man

$$\int_X f \, d\lambda = \begin{cases} \sum_{i \in \mathbb{N} \text{ mit } y_i \in (0, \infty)} y_i \lambda(A_i) & \text{falls } \lambda(f^{-1}(\{\infty\})) = 0, \\ \infty & \text{falls } \lambda(f^{-1}(\{\infty\})) > 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

**Bemerkung 5.3.1** Auch wenn  $\lambda(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$  kann die Summe  $\infty$  werden, entweder weil die Summe nicht in  $\mathbb{R}$  konvergiert oder weil  $\lambda(A_i)$  unendlich ist. Weil in der Summe in (5.4) jedoch nur über nicht-negative Zahlen und möglicherweise  $\infty$  summiert wird, gibt es in jedem Fall keine Ambivalenz bezüglich der Reihenfolge in dieser Summe. Außerdem wird durch  $y_i \in (0, \infty)$  sowohl ein Produkt von  $y_i = 0$  mit  $\lambda(A_i) = \infty$  als von  $y_i = \infty$  mit  $\lambda(A_i) = 0$  vermieden.

**Bemerkung 5.3.2** Bemerke, dass für einfache Funktionen  $f$  in (5.2) mit  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$  gilt, dass sie  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ - $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ -messbar sind. Übrigens, wenn klar ist, welche Dimension gemeint ist, schreiben wir  $\mathcal{L}$  statt  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ .

Als nächstes wollen wir auch Funktionen zulassen, die das Vorzeichen wechseln. Um  $(\infty - \infty)$ -Probleme zu vermeiden, betrachten wir positiver Teil und negativer Teil der Funktion getrennt.

**Lemma 5.4** Sei  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty)$  eine **einfache**  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$ -messbare Funktion. Dann sind  $f^+$  und  $f^-$ , definiert durch

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \quad \text{und} \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0)$$

**einfache**  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$ -messbare Funktionen und  $\int_X f^+ d\lambda$  und  $\int_X f^- d\lambda$  sind wohldefiniert in  $[0, \infty]$ .

**Bemerkung 5.4.1** Man hat  $f = f^+ - f^-$  und  $|f| = f^+ + f^-$ . Siehe Abbildung 5.1.

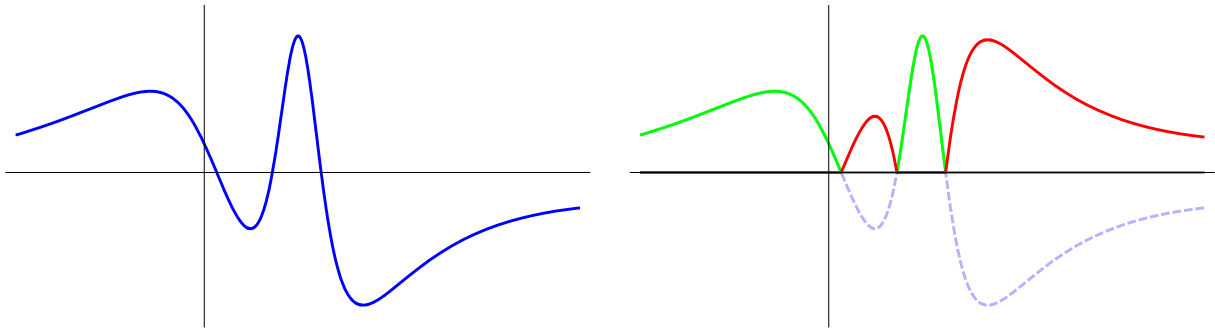


Abbildung 5.1: Links der Graph einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und rechts der für  $f^+$  und  $f^-$ .

**Beweis.** Die Mengen  $A_i = f^{-1}(y_i)$  sind paarweise disjunkt und so gilt

$$f^+ = \max \left( \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \mathbf{1}_{A_i}, 0 \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \max(y_i, 0) \mathbf{1}_{A_i}.$$

Also ist  $f^+$  eine einfache Funktion. Ähnliches gilt für  $f^-$ .

Wir zeigen, dass  $f^+$   $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$ -messbar ist, und nehmen dazu  $A \in \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Zu zeigen ist, dass  $(f^+)^{-1}(A) \in \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ . Es gilt, dass auch  $A_+ = A \cap (0, \infty) \in \mathcal{L}$ ,  $A_0 = A \cap \{0\} \in \mathcal{L}$  und  $A_- = A \cap (-\infty, 0) \in \mathcal{L}$ . Weil  $A = A_+ \cup A_0 \cup A_-$ , folgt

$$(f^+)^{-1}(A) = (f^+)^{-1}(A_+) \cup (f^+)^{-1}(A_0) \cup (f^+)^{-1}(A_-).$$

Man findet

$$\begin{aligned} (f^+)^{-1}(A_+) &= f^{-1}(A_+) \in \mathcal{L}, \\ (f^+)^{-1}(\{0\}) &= f^{-1}((-\infty, 0]) \in \mathcal{L}, \\ (f^+)^{-1}(A_-) &= \emptyset \in \mathcal{L}, \end{aligned}$$

und es folgt, wenn  $A_0 = \{0\}$ , dass

$$(f^+)^{-1}(A) = f^{-1}(A_+) \cup f^{-1}((-\infty, 0]) \in \mathcal{L}.$$

Wenn  $A_0 = \emptyset$  gilt, folgt

$$(f^+)^{-1}(A) = f^{-1}(A_+) \in \mathcal{L}.$$

Auch hier gilt ähnliches für  $f^-$ . ■

**Definition 5.5 (Lebesgue-Integral für einfache Funktionen)** Sei  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty)$  eine **einfache**  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$ -messbare Funktion. Man nennt  $f$  **Lebesgue-integrierbar** auf  $X$ , wenn  $\int_X f^+ d\lambda < \infty$  und  $\int_X f^- d\lambda < \infty$ . Dann definiert man das Lebesgue-Integral von  $f$  über  $X$  als

$$\int_X f d\lambda = \int_X f^+ d\lambda - \int_X f^- d\lambda.$$

**Bemerkung 5.5.1** Lebesgue-integrierbar lässt sich auch für Funktionen  $f$  definieren, die auch  $\infty$  oder  $-\infty$  als Werte annehmen, aber dann nur auf Nullmengen:  $\lambda(\{x \in X; |f(x)| = \infty\}) = 0$ . Weil das Lebesgue-Integral eine Nullmenge nicht sieht, kann man die Funktion  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$  ersetzen durch die Funktion  $f^* : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } |f(x)| \neq \infty, \\ 0 & \text{falls } |f(x)| = \infty. \end{cases}$$

Man nennt  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$  Lebesgue-integrierbar, wenn  $\lambda(\{x \in X; |f(x)| = \infty\}) = 0$  und  $f^*$  Lebesgue-integrierbar ist. Man definiert dann

$$\int_X f d\lambda = \int_X f^* d\lambda.$$

### 5.1.2 Für allgemeinere Funktionen

Die folgende Konstruktion sollte einem bekannt vorkommen, wenn man sich noch an die Einführung des Riemann-Integrals erinnert. Der Unterschied zum Riemann-Integral aus den Analysis-1&2-Vorlesungen ist, dass nun viel mehr elementare Funktionen beim Approximieren zugelassen sind.

**Definition 5.6** Sei  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir definieren **das obere Integral** durch

$$\overline{\int}_X f d\lambda = \inf \left\{ \int_X g d\lambda; g : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist einfach, Lebesgue-integrierbar und } f \leq g \right\},$$

und **das untere Integral** durch

$$\underline{\int}_X f d\lambda = \sup \left\{ \int_X g d\lambda; g : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist einfach, Lebesgue-integrierbar und } g \leq f \right\}.$$

**Bemerkung 5.6.1** Das Supremum von  $G \subset \mathbb{R}$  ist definiert als die kleinste obere Schranke und  $s$  ist eine obere Schranke für  $G$ , wenn  $x \leq s$  für alle  $x \in G$ . Wenn  $G$  die leere Menge ist, ist jedes  $s \in \mathbb{R}$  eine obere Schranke und man definiert  $\sup \emptyset = -\infty$ . Ebenso setzt man  $\inf \emptyset = \infty$ . Wenn es also keine einfache Lebesgue-integrierbare Funktion oberhalb von  $f$  gibt, setzt man  $\overline{\int}_X f d\lambda = \infty$ .

**Bemerkung 5.6.2** Die Definition ist so, dass für eine einfache Lebesgue-integrierbare Funktion  $g : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\overline{\int}_X g d\lambda = \int_X g d\lambda = \underline{\int}_X g d\lambda \in \mathbb{R}.$$

Die Definitionen 5.6 und 5.5 widersprechen sich also nicht.

**Lemma 5.7** Sei  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\int_{\underline{X}} f \, d\lambda \leq \overline{\int}_X f \, d\lambda. \quad (5.5)$$

**Beweis.** Für einfache Funktionen  $g_1, g_2$  findet man, dass  $g_1 \leq g_2$  impliziert  $\int_X g_1 d\lambda \leq \int_X g_2 d\lambda$ . Wenn es einfache Lebesgue-integrierbare Funktionen  $g_1, g_2$  gibt mit  $g_1 \leq f \leq g_2$ , dann folgt

$$\int_{\underline{X}} f \, d\lambda = \sup \left\{ \int_X g_1 \, d\lambda; \dots \right\} \leq \inf \left\{ \int_X g_2 \, d\lambda; \dots \right\} = \overline{\int}_X f \, d\lambda.$$

Wenn es keine solche Funktion  $g_1$  gibt, dann gilt  $\int_{\underline{X}} f \, d\lambda = \sup \emptyset = -\infty$ . Wenn es keine solche Funktion  $g_2$  gibt, dann gilt  $\overline{\int}_X f \, d\lambda = \inf \emptyset = \infty$ . Beide Male folgt (5.5). ■

**Definition 5.8 (Lebesgue-Integral)** Sei  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Wenn

$$\overline{\int}_X f \, d\lambda = \int_{\underline{X}} f \, d\lambda =: I \in \mathbb{R}, \quad (5.6)$$

heißt  $f$  **Lebesgue-integrierbar über  $X$** . Dieses  $I$  nennt man das **Lebesgue-Integral von  $f$  über  $X$**  und man schreibt

$$\int_X f \, d\lambda := I.$$

**Bemerkung 5.8.1** Auch hier trifft Bemerkung 5.5.1: wir hätten auch Funktionen  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$  betrachten können.

Übrigens, auch wenn  $f(X) \subset \mathbb{R}$  gilt, bedeutet das nicht, dass  $f$  beschränkt sein muss.

**Definition 5.9** • Für die Menge aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf  $X \subset \mathbb{R}^n$  schreibt man  $\mathcal{L}(X)$  oder  $\mathcal{L}^1(X)$ .

- Man nennt eine Funktion  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  **lokal Lebesgue-integrierbar auf  $X$** , wenn  $f \mathbf{1}_K : X \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-integrierbar ist für jede kompakte Teilmenge  $K \subset X$ .
- Für die Menge aller lokal Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf  $X \subset \mathbb{R}^n$  schreibt man  $\mathcal{L}_{\text{lok}}(X)$  oder  $\mathcal{L}_{\text{lok}}^1(X)$ .

**Lemma 5.10** Sei  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty)$ . Wenn man für jedes  $\varepsilon > 0$  zwei einfache Lebesgue-integrierbare Funktionen  $g_1, g_2 : X \rightarrow (-\infty, \infty)$  finden kann derart, dass

1.  $g_1 \leq f \leq g_2$  und
2.  $\int_X g_2 \, d\lambda \leq \int_X g_1 \, d\lambda + \varepsilon$ ,

dann ist  $f$  Lebesgue-integrierbar über  $X$  und

$$\int_X g_1 \, d\lambda \leq \int_X f \, d\lambda \leq \int_X g_2 \, d\lambda.$$

**Beweis.** Sei  $\varepsilon > 0$ , dann hat man einfache, Lebesgue-integrierbare Funktionen  $g_1, g_2$  mit

$$\int_X g_1 d\lambda \leq \int_{\underline{X}} f d\lambda \leq \overline{\int}_X f d\lambda \leq \int_X g_2 d\lambda \leq \int_X g_1 d\lambda + \varepsilon.$$

Also gilt  $\int_{\underline{X}} f d\lambda \in \mathbb{R}$  und auch

$$\int_{\underline{X}} f d\lambda \leq \overline{\int}_X f d\lambda \leq \int_{\underline{X}} f d\lambda + \varepsilon.$$

Weil diese Abschätzung für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt (5.6) und die Lebesgue-Integrierbarkeit. ■

Der wichtigste Unterschied vom Lebesgue-Integral zum Riemann-Integral ist die Vielzahl der Approximationsmöglichkeiten. Die elementaren Funktionen sind nun auf Lebesgue-messbare Mengen definiert und dürfen abzählbar viele Werte annehmen. Zum Beispiel ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ x & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

Lebesgue-integrierbar. Weil  $\mathbb{Q}$  abzählbar ist, ist diese Funktion sogar einfach. Weil  $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$  folgt

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 0.$$

**Bemerkung 5.10.1** Sei  $X$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , die uns erlaubt das Riemann-Integral über  $X$  zu definieren. Wenn  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar ist, dann ist  $f$  Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int_X f d\lambda = \int_X f(x) dx.$$

Diese Aussage trifft nicht unbedingt zu, wenn man sich das uneigentliche Riemann-Integral anschaut.

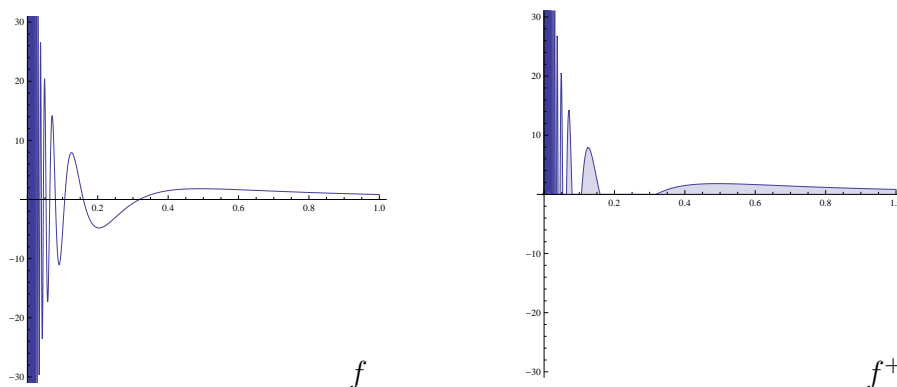


Abbildung 5.2: Skizzen zu  $f$  and  $f^+$  für  $f(x) = \sin(1/x)/x$

Für  $f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  existiert das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^1 f(x) dx := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx.$$

Der  $n$ -te Buckel von rechts in Abbildung 5.2 für  $f$ , gemeint ist der auf dem Intervall  $\left(\frac{1}{(n+1)\pi}, \frac{1}{n\pi}\right)$ , hat einen Flächeninhalt der Größenordnung  $\frac{1}{n}$ . Für das uneigentliche Riemann-Integral findet man so eine konvergente alternierende Folge ähnlich wie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n},$$

die jedoch nicht absolut konvergiert. Jedes obere Lebesgue-Integral für  $f^+$  liefert  $\infty$ .

## 5.2 Von stetig zu integrierbar

Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, wenn:

$$B \in \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),$$

bei dem  $\mathcal{T}$  die Standardtopologie in  $\mathbb{R}$  beziehungsweise in  $\mathbb{R}^n$  ist. Dann folgt auch

$$B \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Dies bedeutet, dass stetige Funktionen  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar sind. Theorem 4.2 hat uns gezeigt, dass die Borel-Mengen in  $\mathbb{R}^n$  in der Lebesgue- $\sigma$ -Algebra liegen. Also weil  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  gilt, folgt

$$B \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

und das liefert uns genau:

**Lemma 5.11** *Eine stetige Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar.*

Um zu zeigen, dass  $f$   $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$ -messbar ist, müsste man beweisen, dass

$$B \in \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Weil  $\mathcal{L} \supset \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$  gilt und weil  $\mathcal{L}$  viel mehr Mengen enthält als  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ , ist  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$ -messbar eine schwerere Bedingung als  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar.

Insgesamt findet man folgendes:

		$f$ ist $\mathcal{T}$ - $\mathcal{T}$ -stetig	
		$\Downarrow$	
$f$ ist $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ - $\mathcal{L}$ -messbar	$\Rightarrow$	$f$ ist $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar	
$\Downarrow$		$\Downarrow$	
$f$ ist $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$ -messbar	$\Rightarrow$	$f$ ist $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar	

Sonstige Implikationen zwischen diesen verschiedenen Typen von Messbarkeit gibt es so nicht.

In Analysis 1 hat man gesehen, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervallen Riemann-integrierbar sind. Das kann man für Lebesgue-integrierbar allgemeiner formulieren. Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar und setzen wir

$$A_{n,k} = f^{-1}([k2^{-n}, (k+1)2^{-n})).$$

Weil  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar ist, folgt aus der Tatsache, dass halboffene Intervalle  $[a, b)$  Borel-Mengen sind, dass die Mengen  $A_{n,k} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$   $\mathcal{L}$ -messbar sind. Dann folgt wiederum, dass

$$g_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k 2^{-n} \mathbf{1}_{A_{n,k}} \quad \text{und} \quad h_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (k+1) 2^{-n} \mathbf{1}_{A_{n,k}}$$

einfache  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$ -messbare Funktionen sind und außerdem gilt für  $x \in A_{n,k}$ , dass

$$g_n(x) = k 2^{-n} \leq f(x) \leq (k+1) 2^{-n} = h_n(x).$$

Weil die  $\{A_{n,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  disjunkt sind und weil  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_{n,k} = \mathbb{R}$ , folgt

$$g_n \leq f \leq h_n \leq g_n + 2^{-n} \quad \text{auf } X. \quad (5.7)$$

**Lemma 5.12** Sei  $\lambda(X) < \infty$  und nehme an, die Funktion  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist beschränkt<sup>1</sup> und  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar. Dann ist  $f$  Lebesgue-integrierbar über  $X$ .

**Beweis.** Man verwende (5.7), die Beschränktheit von  $f$  und  $\lambda(X) < \infty$ . ■

**Bemerkung 5.12.1** Weil stetige Funktionen auf kompakte Teilmengen beschränkt sind, ist  $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $f$  stetig und  $K$  kompakt, Lebesgue-integrierbar über  $K$ .

**Bemerkung 5.12.2** Die Beschränktheit von  $f$  kann man ersetzen durch die Integrierbarkeit einer dieser Funktionen  $g_n$ .

### 5.3 Kombinationen messbarer Funktionen

Wir haben nun messbar und integrierbar definiert aber haben Fragen, wie man mit solchen Funktionen rechnet, bis jetzt unbeachtet gelassen.

Einige Resultate, die nützlich sind wenn man mit  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbaren Funktionen rechnet, folgen:

**Theorem 5.13** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Seien  $f, g, f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar für  $k \in \mathbb{N}$ . Sei  $c \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch

$$cf, f+g, fg, |f|, \min(f, g), \max(f, g), \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k, \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k \quad \text{und} \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$$

$\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar. Wenn  $g(x) \neq 0$  für  $x \in X$  ist auch  $\frac{1}{g}$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar.

**Beweis.** Weil die offenen Intervalle eine Basis für  $\mathcal{T}$  bilden, reicht es, wenn wir nur die  $\mathcal{A}$ -Messbarkeit der Urbilder von Intervallen  $(a, b)$  zeigen. Weil

$$(a, b) = (a, \infty) \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (b - 2^{-n}, \infty)$$

können wir uns sogar beschränken auf Intervalle  $(a, \infty)$ .

1)  $cf$ . Für  $c > 0$  findet man

$$\begin{aligned} (cf)^{-1}(a, \infty) &= \{x \in X \text{ mit } cf(x) \in (a, \infty)\} \\ &= \{x \in X \text{ mit } f(x) \in (c^{-1}a, \infty)\} = f^{-1}(c^{-1}a, \infty) \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt beschränkt, wenn es eine Zahl  $M \in \mathbb{R}$  gibt derart, dass für alle  $x \in X$  gilt  $|f(x)| \leq M$ .



Für  $c < 0$  folgt ähnlich

$$(cf)^{-1}(a, \infty) = f^{-1}(-\infty, c^{-1}a) \in \mathcal{A}$$

und für  $c = 0$  finden wir

$$(cf)^{-1}(a, \infty) = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{A} & \text{falls } a \geq 0, \\ X \in \mathcal{A} & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

2)  $f + g$ . Man kann kontrollieren, dass

$$(f + g)^{-1}(a, \infty) = \bigcup_{\substack{p, q \in \mathbb{Q} \\ p+q > a}} (f^{-1}(p, \infty) \cap g^{-1}(q, \infty)),$$

und diese Menge ist  $\mathcal{A}$ -messbar als eine abzählbare Vereinigung von  $\mathcal{A}$ -messbaren Mengen.

3)  $fg$ . Weil  $fg = \frac{1}{2}(f+g)^2 - \frac{1}{2}f^2 - \frac{1}{2}g^2$  genügt es, wenn wir nur  $f^2$  betrachten:

$$(f^2)^{-1}(a, \infty) = \begin{cases} f^{-1}(\sqrt{a}, \infty) \cup f^{-1}(-\infty, -\sqrt{a}) & \text{für } a \geq 0, \\ X & \text{für } a < 0, \end{cases}$$

ist  $\mathcal{A}$ -messbar.

4)  $|f|$ . Man hat

$$|f|^{-1}(a, \infty) = \begin{cases} f^{-1}(a, \infty) \cup f^{-1}(-\infty, -a) & \text{für } a \geq 0, \\ X & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

5) Weil  $\min(f, g) = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g - \frac{1}{2}|f - g|$  und  $\max(f, g) = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}|f - g|$  folgt die Messbarkeit aus den vorhergehenden Ergebnissen.

6)  $\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k$ . Man verwende:

$$\left( \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k \right)^{-1} [a, \infty) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (f_k)^{-1} [a, \infty).$$

7)  $\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k$ . Man verwende:

$$\left( \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k \right)^{-1} (a, \infty) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (f_k)^{-1} (a, \infty).$$

8)  $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$ . Man verwende:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k = \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq m} f_k.$$

9)  $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$ . Ähnlich wie beim  $\liminf$ .

10)  $\frac{1}{g}$ . Das wird eine Hausaufgabe. ■

## 5.4 Von integrierbar zu fast stetig

**Lemma 5.14** Eine lokal Lebesgue-integrierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar.

**Beweis.** Auf jeder abgeschlossenen Kugel  $\overline{B_R(0)}$  ist  $f$  Lebesgue-integrierbar. Dann existieren für jede  $n \in \mathbb{N}^+$  einfache Lebesgue-integrierbare Funktionen  $g_n, h_n : \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$g_n \leq f \leq h_n$$

und

$$\int_{\overline{B_R(0)}} g_n \, d\lambda \leq \int_{\overline{B_R(0)}} f \, d\lambda \leq \int_{\overline{B_R(0)}} h_n \, d\lambda \leq \int_{\overline{B_R(0)}} g_n \, d\lambda + \frac{1}{n}. \quad (5.8)$$

Setzen wir  $g_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$  und  $h_\infty = \inf_{n \in \mathbb{N}} h_n$ , dann sind  $g_\infty$  und  $h_\infty$   $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar auf  $\overline{B_R(0)}$  und außerdem gilt

$$g_\infty \leq f \leq h_\infty, \\ \int_{\overline{B_R(0)}} g_\infty \, d\lambda = \int_{\overline{B_R(0)}} h_\infty \, d\lambda.$$

Setzt man  $D_n = \left\{ x \in \overline{B_R(0)}; |g_\infty(x) - h_\infty(x)| > \frac{1}{n} \right\}$ , dann gilt

$$\lambda(D_n) = 0.$$

Weil

$$D_\infty = \left\{ x \in \overline{B_R(0)}; |g_\infty(x) - h_\infty(x)| \neq 0 \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} D_n$$

hat man  $\lambda(D_\infty) = 0$ . Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  hat man

$$g_\infty^{-1}(a, \infty) \subset \left( f^{-1}(a, \infty) \cap \overline{B_R(0)} \right) \subset h_\infty^{-1}(a, \infty),$$

und weil  $\lambda(D_\infty) = 0$  gilt, ist  $h_\infty^{-1}(a, \infty) \setminus g_\infty^{-1}(a, \infty)$  eine Nullmenge. Weil

$$h_\infty^{-1}(a, \infty) \setminus \left( f^{-1}(a, \infty) \cap \overline{B_R(0)} \right)$$

eine Teilmenge einer Nullmenge ist und weil  $\mathcal{L}$  vollständig ist, ist diese Menge und auch  $f^{-1}(a, \infty) \cap \overline{B_R(0)}$   $\mathcal{L}$ -messbar. Dann ist auch  $f^{-1}(a, \infty) = \bigcup_{R \in \mathbb{N}^+} f^{-1}(a, \infty) \cap \overline{B_R(0)}$   $\mathcal{L}$ -messbar. Wir finden, dass die Funktion  $f$   $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar ist. ■

**Beispiel 5.15** Funktion  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ist  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$ -messbar, sogar Lebesgue-integrierbar auf  $\mathbb{R}$ , aber auch nirgends stetig. Denn für jedes  $x \in \mathbb{R}$  und  $\delta > 0$  gibt es  $y \in \mathbb{R}$  mit  $|x - y| < \delta$  und  $|\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) - \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(y)| > \frac{1}{2}$ . Jedoch  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$  ist eine messbare Funktion und nicht sehr weit entfernt von einer stetigen Funktion. Für jedes beschränkte Intervall  $[a, b]$  und  $\varepsilon > 0$  kann man eine kompakte Teilmenge  $K \subset [a, b]$  finden mit  $\lambda([a, b] \setminus K) < \varepsilon$  derart, dass  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist. Eine Konstruktion von  $K$  ist zum Beispiel die folgende.

Sei  $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine Abzählung von  $\mathbb{Q} \cap [a, b]$  und setze

$$K = [a, b] \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (q_i - 2^{-2-i}\varepsilon, q_i + 2^{-2-i}\varepsilon).$$

Man zeigt direkt, dass  $K$  beschränkt, abgeschlossen und darum auch kompakt ist, und dass  $\lambda([a, b] \setminus K) < \varepsilon$  gilt. Weil  $(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}})|_K = 0$ , ist diese Funktion sogar konstant auf  $K$ .

Obwohl dieses Beispiel zeigt, dass messbare und integrierbare Funktionen nirgends stetig zu sein brauchen, zeigt das folgende Ergebnis, dass eine messbare Funktion doch auch wieder nicht sehr weit entfernt ist von einer stetigen Funktion.

**Theorem 5.16 (Lusin)** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}_T$ -messbar, sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ , mit  $A \in \mathcal{L}$  und  $\lambda(A) < \infty$ , und sei  $\varepsilon > 0$ , dann existiert eine kompakte Menge  $K \subset A$  derart, dass

1.  $\lambda(A \setminus K) < \varepsilon$  und
2.  $f|_K$  ist stetig.

**Bemerkung 5.16.1** Das ursprüngliche Theorem ist allgemeiner formuliert. Wir haben uns das Theorem von Lusin zurechtgeschnitten für das Lebesgue-Maß.

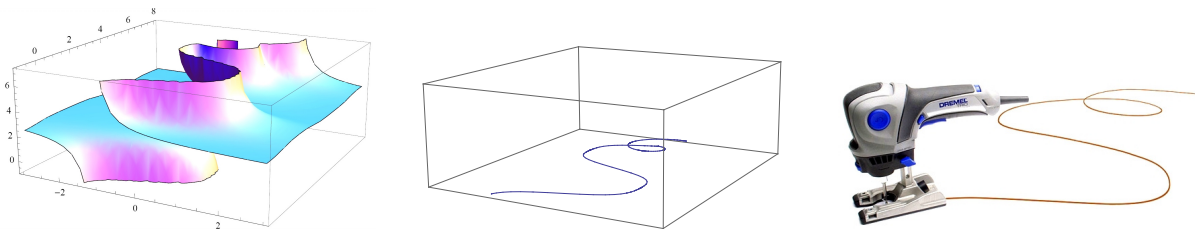


Abbildung 5.3: Man kann eine beliebig kleine Menge aus dem Definitionsbereich herausnehmen und bekommt eine stetige Funktion auf dem Rest.

**Beweis.** Setze  $B_{i,j} = [\frac{j}{i+1}, \frac{j+1}{i+1})$  für  $i \in \mathbb{N}$  und  $j \in \mathbb{Z}$ . Für jedes  $i \in \mathbb{N}$  hat man  $\mathbb{R} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} B_{i,j}$ . Als nächstes definieren wir

$$A_{i,j} = A \cap f^{-1}(B_{i,j}).$$

Bemerke, dass  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A_{i,j} = A$ . Weil  $f$  eine messbare Funktion ist, sind sowohl  $f^{-1}(B_{i,j})$  als auch  $A_{i,j}$  messbar. Wegen Theorem 4.5 gibt es kompakte  $K_{i,j} \subset A_{i,j}$  mit  $\lambda(A_{i,j} \setminus K_{i,j}) < 2^{-3-i-|j|}\varepsilon$ . Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \lambda\left(A \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} K_{i,j}\right) &= \lambda\left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A_{i,j} \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} K_{i,j}\right) \leq \\ &\leq \lambda\left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} (A_{i,j} \setminus K_{i,j})\right) \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-3-i-|j|}\varepsilon < 2^{-1-i}\varepsilon. \end{aligned}$$

Dann gibt es  $N_{\varepsilon,i} \in \mathbb{N}$  mit

$$\lambda\left(A \setminus \bigcup_{|j| \leq N_{\varepsilon,i}} K_{i,j}\right) < 2^{-1-i}\varepsilon.$$

Definieren wir  $K_i = \bigcup_{|j| \leq N_{\varepsilon,i}} K_{i,j}$  und  $f_i : K_i \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f_i(x) = \frac{j}{i+1} \text{ falls } x \in K_{i,j}.$$

Weil die  $\{A_{i,j}\}_{j \in \mathbb{Z}}$  und deshalb auch die  $\{K_{i,j}\}_{j \in \mathbb{Z}}$  disjunkt sind, sind diese Funktionen wohldefiniert. Weil die  $K_{i,j}$  kompakt sind, gilt  $d(K_{i,j_1}, K_{i,j_2}) > 0$  für  $j_1 \neq j_2$  und die  $f_i$  sind stetig auf  $K_i$ . Außerdem sind die  $f_i$  so definiert, dass

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{1}{i+1} \text{ für alle } x \in K_i.$$

Nun setzen wir  $K = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$ . Die Menge  $K$  ist kompakt und

$$\lambda(A \setminus K) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A \setminus K_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-1-i} \varepsilon = \varepsilon.$$

Außerdem gilt, dass die  $f_i$  stetig sind auf  $K$  und dass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = f \text{ gleichmäßig auf } K.$$

Dann ist auch  $f$  stetig auf  $K$ . ■

## 5.5 Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

Für das Lebesgue-Integral gibt es ähnliche Ergebnisse wie beim Riemann-Integral.

**Lemma 5.17** *Seien  $f_1, f_2 : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-integrierbar über  $X$  und sei  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , dann ist  $\alpha f_1 + \beta f_2$  Lebesgue-integrierbar über  $X$  und*

$$\int_X (\alpha f_1 + \beta f_2) d\lambda = \alpha \int_X f_1 d\lambda + \beta \int_X f_2 d\lambda.$$

**Bemerkung 5.17.1** *Die Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen über  $X$ , also  $\mathcal{L}(X)$ , bilden einen Vektorraum. Wenn man dabei eine Norm haben möchte, könnte man sich überlegen, ob  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$  definiert durch*

$$\|f\|_{\mathcal{L}(X)} = \int_X |f| d\lambda$$

*vernünftig wäre. Die meisten Eigenschaften einer Norm sind erfüllt. Aus  $\|f\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$  folgt aber nicht, dass  $f = 0$  sondern nur  $\lambda(\{x \in X; f(x) \neq 0\}) = 0$ .*

**Beweis.** Wenn  $\alpha$  und  $\beta$  positiv sind, kann man aus einfachen Funktionen  $g_1 = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_{1,i} \mathbf{1}_{A_{1,i}}$  oberhalb von  $f_1$  und  $g_2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_{2,i} \mathbf{1}_{A_{2,i}}$  oberhalb von  $f_2$  eine neue konstruieren, die oberhalb der Summe  $\alpha f_1 + \beta f_2$  liegt. Man definiere

$$g = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} (\alpha y_{1,i} + \beta y_{2,j}) \mathbf{1}_{A_{1,i} \cap A_{2,j}}. \quad (5.9)$$

Mit (5.9) und Lemma 5.10 kann man nun das gewünschte Resultat bekommen. Wenn zum Beispiel  $\alpha < 0$ , dann verwendet man für diese Konstruktion eine unterhalb liegende einfache Funktion. Eine ähnliche Änderung ist notwendig falls  $\beta < 0$ . ■

Im folgenden Lemma nehmen wir an, dass auch  $X_1$  und  $X_2$  Lebesgue-messbar sind.

**Lemma 5.18** *Sei  $f : X_1 \cup X_2 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-integrierbar über  $X_1$  und über  $X_2$ . Wenn  $\lambda(X_1 \cap X_2) = 0$ , dann gilt:  $f$  ist Lebesgue-integrierbar über  $X_1 \cup X_2$  und*

$$\int_{X_1 \cup X_2} f d\lambda = \int_{X_1} f d\lambda + \int_{X_2} f d\lambda.$$

**Beweis.** Für den Leser. ■

**Lemma 5.19** Falls  $f_1, f_2 : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-integrierbar sind über  $X$  und  $f_1 \leq f_2$ , dann gilt

$$\int_X f_1 \, d\lambda \leq \int_X f_2 \, d\lambda.$$

**Beweis.** Für den Leser. ■

**Lemma 5.20** Falls  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-integrierbar ist über  $X$ , dann sind  $f^+$ ,  $f^-$  und  $|f|$  Lebesgue-integrierbar über  $X$  und es gilt

$$\left| \int_X f \, d\lambda \right| \leq \int_X |f| \, d\lambda.$$

**Beweis.** Für den Leser. ■

