

Name :

Aufgabe 1

1. Zeigen Sie, dass  $\sum_{k=1}^n \binom{k}{4} = \binom{n+1}{5}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Name :

Aufgabe 2

2. Sei  $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  und  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Beweisen oder widerlegen Sie:

(a)  $x + q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;

(b)  $xq \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;

(c)  $(x + q)^2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

Name :

Aufgabe 3

3. Geben Sie alle Lösungen  $z \in \mathbb{C}$  von

$$(z^2 - 2z + 2)(z^2 + i) = 0.$$

Schreiben Sie  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Name :

Aufgabe 4

4. Wir betrachten die Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$ .

- (a) Welchen Konvergenzradius hat diese Reihe?
- (b) Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert/divergiert diese Reihe?

Name :

Aufgabe 5

5. (a) Wie definiert man für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Differenzierbarkeit in  $a \in \mathbb{R}$ ?
- (b) Beweisen oder widerlegen Sie die Behauptung:  
Wenn  $x \mapsto f(x)$  differenzierbar ist in  $a$ , dann ist auch  $x \mapsto f(x) |f(x)|$  differenzierbar in  $a$ .

Name :

Aufgabe 6

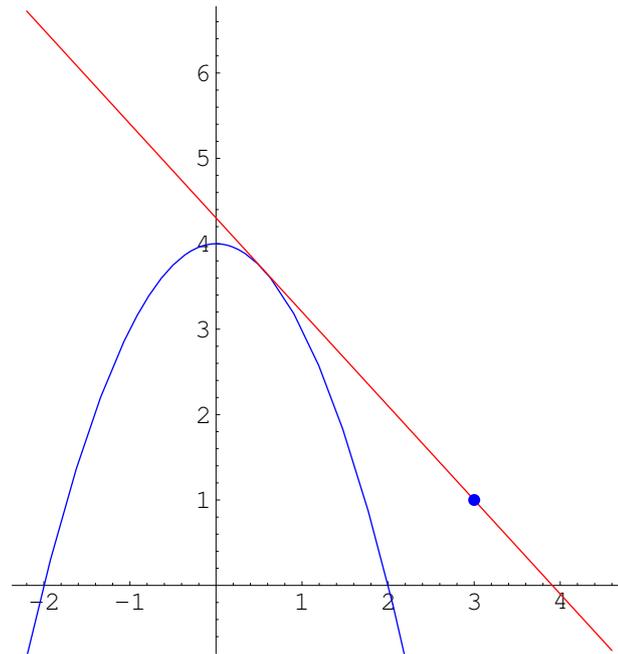
6. Zeigen Sie, dass es genau eine Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, derart, dass

$$\exp(g(x)) + g(x) = x.$$

Name :

Aufgabe 7

7. Berechnen Sie eine Gerade, die eine Tangente an  $y = 4 - x^2$  ist und durch den Punkt  $(x, y) = (3, 1)$  geht. Als Hinweis ein Bild dazu:



Name :

Aufgabe 8

8. Wir betrachten  $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \ln(x - 1)$ .

(a) Berechnen Sie ein Polynom  $p$  vom Grad kleiner oder gleich 3, für das gilt

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - p(x)}{(x - 2)^3} = 0.$$

(b) Geben Sie die Formel für den Restterm von Lagrange für  $f(x) - p(x)$  mit  $p$  aus (a).

Name :

Aufgabe 9

9. Berechnen Sie

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1 - \cos(\sqrt{x})}{\sin(x)}.$$

Name :

Aufgabe 10

10. Sind folgende Integrale definiert als eigentliches Riemann-Integral?  
Wenn ja, berechnen Sie den Wert.

(a)  $\int_{-2}^2 (x - [x]) dx$  und  $[x] = \sup \{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$  ist die Ganzzahlfunktion;

(b)  $\int_{-1}^1 x^{-4} dx$ ;

(c)  $\int_0^1 x \cos(\pi x) dx$ .