1. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{2n} \binom{k}{2} (-1)^k = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Wir definieren $\mathbb{Q}[i] = \{p + iq; p, q \in \mathbb{Q}\}$. Stimmt es, dass für $z, w \in \mathbb{Q}[i]$ mit $w \neq 0$ gilt $\frac{z}{w} \in \mathbb{Q}[i]$? Man beweise oder gebe ein Gegenbeispiel.

3. Berechnen Sie alle Lösungen in $z \in \mathbb{C}$ von $(z+1)^3 = 1$.

4. Zwei Lösungen von
$$z^3 - (5 - 3i)\, z^2 + (11 - 4i)\, z - 7 + i = 0$$
sind $z = 1$ und $z = 1 + i$. Berechnen Sie die Übrige(n).

5. Sei $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $q_n \in \mathbb{Q}$. Wahr oder nicht wahr (begründen Sie Ihre Antwort):

   (a) Wenn $|q_n - q_m| < \max\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$, dann folgt $\left(\lim_{n\to\infty} q_n\right) \in \mathbb{Q}$.

   (b) Wenn $|q_n - q_m| < \max\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$, dann folgt $\left(\lim_{n\to\infty} q_n\right) \in \mathbb{R}$.

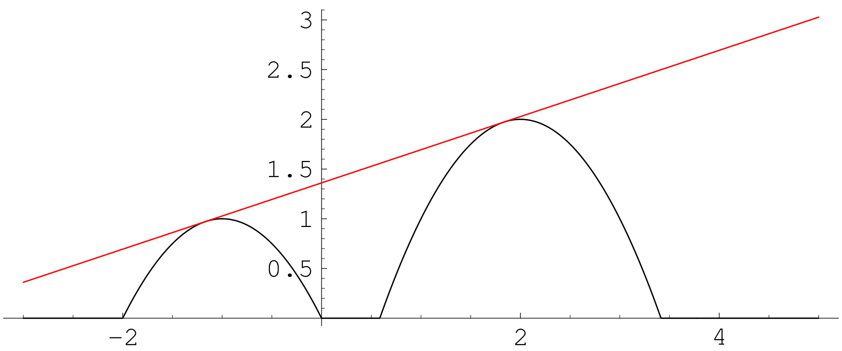
   (c) Wenn $|q_n - q_m| < \min\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$, dann folgt $\left(\lim_{n\to\infty} q_n\right) \in \mathbb{Q}$.

6. Wie lautet die Definition von "$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $a \in \mathbb{R}$"?

7. Beweisen Sie, dass $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist in a, wenn sie Lipschitz-stetig ist in a.

8. Berechnen Sie die Tangente in $x = \sqrt{\pi}$ an der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \exp\left(\sin\left(x^2\right)\right)$.

9. Berechnen Sie die Gerade, die sowohl eine Tangente ist an $y = 2 - (x-2)^2$ als auch an $y = 1 - (x+1)^2$. Siehe auch das Bild:



10. Wir betrachten die Potenzreihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n.$$

    (a) Sei $K \subset \mathbb{C}$ genau die Menge, so dass diese Reihe konvergiert für $z \in K$. Berechnen Sie K.

    (b) Finden Sie eine einfache Formel für $f : K \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$.

    (c) Finden Sie auch eine einfache Formel für $g : K \cap \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$.

11. Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(1 + e^x) - \frac{1}{2}x$.

    (a) Zeigen Sie $f(-x) = f(x)$.

    (b) Zeigen Sie, dass f eine konvexe Funktion ist.

    (c) Berechnen Sie wenn möglich das Minimum und das Maximum.

12. Wie lautet der Mittelwertsatz?

13. Berechnen Sie
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 2x) - 2xe^{-x}}{x^3}.$$