

Analysis I  
Übungsblatt 1

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 23.10.06, 10:15 Uhr besprochen.

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie jeweils, für welche  $x \in \mathbb{R}$  die folgende Ungleichung gilt:

1.  $x^3 > x$  ;
2.  $\frac{x^2 - 1}{|x| + 1} > 1$  ;
3.  $\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 - 1} > 1$  .

**Aufgabe 2.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1.  $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(1+2n)$  ;
2.  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$  ;
3.  $\prod_{n=0}^k (1 + x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{k+1}}}{1-x}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $x \neq 1$ ;
4. Die Folge  $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ , das heißt  $\left\{ 1 + \frac{1}{1}, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \dots \right\}$ , wächst monoton.

**Aufgabe 3.** Man nehme ein Alphabet mit  $n \in \mathbb{N}$  Buchstaben.

1. Wie viele (sinnvolle oder sinnlose) Wörter von  $k$  Buchstaben kann man bilden?
2. Wie viele (sinnvolle oder sinnlose) Wörter von mindestens 1 und höchstens  $k$  Buchstaben kann man bilden?

**Aufgabe 4.** Für die Menge  $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  gilt

- i)  $(0,0) \in A$ ,
- ii) wenn  $(n,m) \in A$ , dann gilt auch  $(n, m+1) \in A$ ,
- iii) wenn  $(n,m) \in A$  und  $n < m$ , dann gilt auch  $(m-1, n+1) \in A$ .

Welche Zahlenpaare aus  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  liegen nicht in  $A$ ?

**Aufgabe 5.** Beweisen Sie, dass  $x^3 = 2$  keine rationale Lösung hat.

**Aufgabe 6.** Hier steht ein Bild zu der Funktion  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ , definiert durch  $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$ . Wie viele Nullstellen hat diese Funktion?

