**Prof. Dr. Guido Sweers** **WS 2006/07**
**Jiří Horák, Ph.D.**

# Analysis I
## Übungsblatt 10

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 08.01.07, 10:15 Uhr besprochen.

**Aufgabe 1.** Formulieren Sie das Einschließungslemma für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

**Aufgabe 2.**

1. Zeigen Sie, dass die Funktion $z \mapsto |z| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{C}$ ist.
2. An welchen Stellen $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist $z \mapsto \operatorname{Arg}(z)$ stetig?

**Aufgabe 3.** Wir beweisen die Stetigkeit der Funktion $f(x) = x^q$ für $q \in \mathbb{Q}$.

1. Für $m \geq 1$ und $a, b \geq 0$ gilt die Ungleichung
$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k} \geq a^m + b^m,$$
und deshalb auch $a + b \geq \sqrt[m]{a^m + b^m}$. Zeigen Sie, dass für $0 \leq x < y$ die folgende Ungleichung gilt:
$$0 \leq \sqrt[m]{y} - \sqrt[m]{x} \leq \sqrt[m]{y-x}.$$
2. Sei $q \in \mathbb{Q}^+$. Zeigen Sie, dass $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^q$ stetig auf $[0,\infty)$ ist.
3. Sei $q \in \mathbb{Q}^-$. Zeigen Sie, dass $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^q$ stetig auf $(0,\infty)$ ist.

**Aufgabe 4.** Welche Grenzwerte existieren? Falls sie existieren, welchen Wert haben sie?

$$a.\ \lim_{x\to 1} \frac{x^{16}-1}{x-1} \qquad b.\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$c.\ \lim_{x\to 0} \frac{|2x-1|-|2x+1|}{x+|x|(1+x)} \qquad d.\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$$

$$e.\ \lim_{x\to 1} \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2x^2-4x+2}} \qquad f.\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - \frac{x^3}{x^2-4}\right)$$

$$g.\ \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{x+1}\left(1-\sqrt{2x+3}\right)}{7-6x+4x^2} \qquad h.\ \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$$

**Aufgabe 5.** Zeigen Sie:

1. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ gilt: $\left|\dfrac{x^n - y^n}{x-y}\right| \leq n\left(\max(|x|,|y|)\right)^{n-1}$.
2. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ gilt: $\left|\dfrac{\exp(x)-\exp(y)}{x-y}\right| \leq \exp\left(\max(|x|,|y|)\right)$.
3. Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.
4. Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig auf $\mathbb{C}$.

**Aufgabe 6.** Berechnen Sie die (horizontalen, vertikalen und schiefen) Asymptoten von:

1. $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$;
2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{x^6 + 2}}{x^2 + 1}$;

3.* $f_3 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = \exp(\frac{1}{x}) + |x|$.