Prof. Dr. Guido Sweers **WS 2006/07**
Jiří Horák, Ph.D.

Analysis I
Übungsblatt 11

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 15.01.07, 10:15 Uhr besprochen.

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Tangente an f in a.

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x^4$ und $a=1$;
2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ und $a=1$;
3. $f:\mathbb{R}\setminus\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\cot(x)$ und $a=1$.

Aufgabe 2. Man berechne die Ableitung:

1. $f:\mathbb{R}\setminus\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\tan(x)$;
2. $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ mit $f(z)=z^2$;
3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\tanh(\frac{1}{1+x^2})$;
4. $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$;
5. $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\sin(\exp\left(\frac{1}{x}\right))$;
6. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\exp x\right)^n$.

Aufgabe 3. Für welche $b,c\in\mathbb{R}$ ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=\begin{cases} x+b & \text{für } x\le 0,\\ c\dfrac{e^x-x-1}{x^2} & \text{für } x>0\end{cases}$$

eine differenzierbare Funktion?

Aufgabe 4.

1. Zeige, dass für $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x^{\frac{1}{m}}$ gilt
$$f'(x)=\frac{x^{\frac{1}{m}}}{mx}.$$
Hinweis: $\left(y^{\frac{1}{m}}-x^{\frac{1}{m}}\right)\left(y^{\frac{m-1}{m}}+y^{\frac{m-2}{m}}x^{\frac{1}{m}}+y^{\frac{m-3}{m}}x^{\frac{2}{m}}+\cdots+y^{\frac{1}{m}}x^{\frac{m-2}{m}}+x^{\frac{m-1}{m}}\right)=y-x.$
2. Zeige auch, dass für $q\in\mathbb{Q}$ und $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x^q$ gilt
$$f'(x)=qx^{q-1}.$$

Aufgabe 5. Zeige, dass für $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\operatorname{bin}(s;x)$ gilt

$$f'(x)=s\operatorname{bin}(s-1;x)\,.$$

Aufgabe 6. Seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$. Die Menge der auf $[a,b]$ stetigen Funktionen nennt man $C^0[a,b]$. Die Notation $C^1[a,b]$ wird für die Menge der Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ verwendet, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

i. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ist differenzierbar;

ii. $f'_+(a)$ und $f'_-(b)$ existieren;

iii. die Funktion $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit $g(x)=\begin{cases} f'_+(a) & \text{für } x=a,\\ f'(x) & \text{für } a<x<b,\\ f'_-(b) & \text{für } x=b\end{cases}$ ist stetig.

Man setzt diese Schreibweise iterativ fort und sagt, dass $f\in C^k[a,b]$ für $k>1$, wenn $f\in C^1[a,b]$ und für g in iii. gilt: $g\in C^{k-1}[a,b]$.

Berechnen Sie, für welche k gilt:

1. $f\in C^k[-1,1]$ für $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=|x|^5$.
2. $f\in C^k[0,1]$ für $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x\in(0,1]\,,\\ 0 & \text{für } x=0.\end{cases}$$

3. $f\in C^k[0,1]$ für $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=\begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{für } x\in(0,1]\,,\\ 0 & \text{für } x=0.\end{cases}$$