Prof. Dr. Guido Sweers **WS 2006/07**
Jiří Horák, Ph.D.

Analysis I
Übungsblatt 12

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 22.01.07, 10:15 Uhr besprochen.

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Extreme von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \left(x - x^2\right) e^{\frac{x-1}{x}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Welche sind global?

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Berechnen Sie, wenn es existiert:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\uparrow 0} f(x)$;
2. $f'(x)$ für $x \in \mathbb{R} \backslash \{0,1\}$;
3. $f'_+(0)$, $f'_-(0)$, $f'_+(1)$ und $f'_-(1)$;
4. $\lim\limits_{x\downarrow 0} f'(x)$, $\lim\limits_{x\uparrow 0} f'(x)$, $\lim\limits_{x\downarrow 1} f'(x)$ und $\lim\limits_{x\uparrow 1} f'(x)$.

Aufgabe 3. Die Lambertsche W-Funktion $w : [\ldots,\infty) \to \mathbb{R}$ wird definiert als die Umkehrfunktion zu $f : [\ldots,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = xe^x$. An den Stellen mit $\ldots$ stehen die kleinst möglichen Zahlen. Berechnen Sie die. Berechnen Sie auch $w'(0)$.

Aufgabe 4. Wir betrachten alle Geraden, die zwei verschiedene Punkte $(x, \arctan(x))$ und $(y, \arctan(y))$ verbinden. Welche Steigungskoeffizienten koennen diese Geraden haben?

Aufgabe 5. Benutzen Sie den Mittelwertsatz für das Berechnen von

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \left(\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{x+1}\right) \right).$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie das Taylorpolynom von Grad 3 für

1. $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ um $x = e$;
2. $\sqrt[3]{\ldots} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um $x = 8$.

Aufgabe 7. Geben Sie die Taylorreihen zu

1. $f_1(x) = \sin(x)$ um $x = \pi$;
2. $f_2(x) = x^2 e^{x-1}$ um $x = 1$.

Aufgabe 8. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\sqrt{x}\right) & \text{für } x \geq 0, \\ \cosh\left(\sqrt{-x}\right) & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass f unendlich oft differenzierbar ist.
2. Geben Sie die dazu gehörenden Taylorpolynome $t_n(x)$ rund $x = 0$ an.
3. Geben Sie Argumente an, wieso für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} |f(x) - t_n(x)| = 0 \; .$$

Aufgabe 9. Benutzen Sie Taylorpolynome für

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos(x) - x - x^2}{x \sin(x^2)} .$$