Prof. Dr. Guido Sweers
Jiří Horák, Ph.D. **WS 2006/07**

Analysis I
Übungsblatt 13

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 29.01.07, 10:15 Uhr besprochen.

Aufgabe 1. Berechnen Sie $\int_0^4 f(x)dx$ für

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{für } x = \frac{1}{2}, \\ 2 & \text{für } \frac{1}{2} < x < 1, \\ 1 & \text{für } 1 \leq x < 2, \\ -1 & \text{für } 2 \leq x < 3, \\ 0 & \text{für } x \geq 3. \end{cases}$$

Aufgabe 2. Geben Sie den Restterm von Lagrange für $\sin(x) - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5\right)$.

Aufgabe 3. Die Zahl e ist durch $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ definiert.

1. Zeigen Sie, dass $e < 3$ (vergleichen Sie mit $1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots = 1 + 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots$).
2. Wie groß muß n mindestens sein, damit $\left|e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right| < 10^{-10}$?
3. Wie groß muß n mindestens sein, damit $\left|e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right| < 10^{-100}$? (Hinweis: $70! \approx 1.19786 \cdot 10^{100}$)

Aufgabe 4. Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$. Sei $\varepsilon > 0$. Finden Sie eine Untersumme und eine Obersumme bezüglich f auf $[0,1]$ (mit den dazu gehörenden Treppenfunktionen), die sich um weniger als ε unterscheiden.

Aufgabe 5. Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die auf (a,b) differenzierbar sind. Nehmen Sie an, dass $g'(x) > 0$ für $x \in (a,b)$. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in (a,b)$ mindestens ein $\xi \in (a,x)$ existiert, so dass

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $f \circ g^{inv}$.

Aufgabe 6. Sei $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ eine auf $[-a,a]$ integrierbare Funktion. Beweisen Sie:

1. Falls f gerade ist, d.h. $f(x) = f(-x)$ für $x \in [-a,a]$, dann gilt:
$$\int_0^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^a f(x)dx.$$
2. Falls f ungerade ist, d.h. $f(x) = -f(-x)$ für $x \in [-a,a]$, dann gilt:
$$\int_0^a f(x)dx = -\int_{-a}^0 f(x)dx \text{ und } \int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Aufgabe 7. Welche Funktionen $f_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ sind auf $[0,1]$ (Riemann-)integrierbar?

1. $f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

2. $f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

3. $f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \text{ und } \frac{1}{x} \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

4. $f_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls } x > 0 \text{ und } \frac{1}{x} \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe 8. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, die auf $[\delta, 1]$ für jedes $\delta > 0$ integrierbar ist. Zeigen Sie, dass f auf $[0,1]$ integrierbar ist.

Aufgabe 9. Zeigen Sie, dass die folgende Funktion auf $[0,1]$ integrierbar ist:

$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 10. Zeigen Sie, dass die folgende Funktion auf $[0,1]$ integrierbar ist, und berechnen Sie $\int_0^1 g(x)dx$.

$$g(x) = \begin{cases} (-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]+1} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$