Prof. Dr. Guido Sweers
Jiří Horák, Ph.D.

WS 2006/07

Analysis I
Übungsblatt 2

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 30.10.06, 10:15 Uhr besprochen.

Aufgabe 1. Wir setzen $\mathbb{K} = \{-1, 0, 1\}$ und rechnen wie gewohnt.

1. Ist $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper?
2. Kann man eine nichttriviale Anordnung definieren?

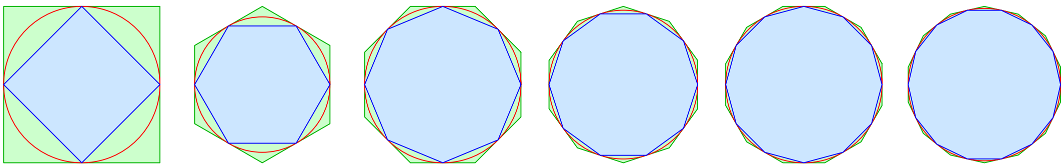
Aufgabe 2. Die multiplikative Gruppe $(\mathbb{G}, \cdot)$ ist definiert durch: $\mathbb{G} = \{1, -1, a, -a\}$ und die Multiplikationsregel lautet wie folgt:

$\cdot$	1	-1	a	$-a$
1	1	-1	a	$-a$
-1	-1	1	$-a$	a
a	a	$-a$	-1	1
$-a$	$-a$	a	1	-1

Kann man eine totale Anordnung $\leq$ definieren, so dass $(\mathbb{G}, \cdot, \leq)$ eine total geordnete Gruppe ist?

Aufgabe 3. Zeige, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] := \left\{p + q\sqrt{5}; p, q \in \mathbb{Q}\right\}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation ein Körper ist. Hinweis: $\dfrac{1}{p + q\sqrt{5}} = \dfrac{p - q\sqrt{5}}{p^2 - 5q^2}$.

Aufgabe 4. Angenommen man darf Flächeninhalte vergleichen: konstruiere eine Folge von Intervallschachtelungen, die zu π führt.



Aufgabe 5. Zeige, dass jede konvergente Folge in $\mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 6. Zeige mit Hilfe der Definition, dass $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 7. Die Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_{n+1} &= f(a_n) \text{ für } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

wobei $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{2x}$. Zeige folgendes:

1. $x > 0$ impliziert $f(x) \geq \sqrt{2}$.
2. $x > \sqrt{2}$ impliziert $f(x) < x$.
3. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist monoton fallend.
4. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \sqrt{2}$.