

Analysis I
Übungsblatt 3

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 06.11.06, 10:15 Uhr besprochen.

Aufgabe 1. Schreiben Sie in der Form $x + iy$:

$$\begin{array}{lll} a. (2+3i)(1-i) & b. \frac{1}{3+4i} & c. \frac{4+3i}{1-2i} \\ d. \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 & e. \frac{(1+i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{28}} & f. \left(\cos\left(\frac{1}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{12}\pi\right)\right)^{18} \end{array}$$

Aufgabe 2. Man löse für $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{lll} a. z^4 = 1 & b. z^2 + 3z + 4 = 0 & c. z^2 + 2iz = 4 + 4i \\ d. z^4 + z^2 + 1 = 0 & e. z^2 + 2iz + 5 = 0 & f. z^3 = -2 + 2i \end{array}$$

Aufgabe 3. Man gebe eine Skizze der Mengen:

1. $\operatorname{Re}z = 2\operatorname{Im}z$,
2. $|z-1| = |z+1|$,
3. $\operatorname{Re}z = |z| - 1$,
4. $|z-i| = 2|z+i|$,
5. $\operatorname{Arg}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = \frac{1}{4}\pi$.

Aufgabe 4. Man beweise für $z, w \in \mathbb{C}$:

1. $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$,
2. $|z+w| = |z| + |w| \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(w) \text{ oder} \\ zw = 0. \end{cases}$

Aufgabe 5. Sei $a, w \in \mathbb{C}$ mit $|a| \neq 1$ und $|w| = 1$. Zeige, dass $f: \mathbb{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = w \frac{1-z\bar{a}}{z-a}$ die Menge $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ auf sich selber abbildet.

Zusatzaufgabe (für Feinschmecker):

Aufgabe 6. Sei $a, b, w \in \mathbb{C}$ mit $w \neq 0$, $a \neq b$. Zeige, dass $f: \mathbb{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = w \frac{z-b}{z-a}$ jeden Kreis und jede Gerade in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ auf einen Kreis oder eine Gerade abbildet.