

Analysis I
Übungsblatt 4

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 13.11.06, 10:15 Uhr besprochen.

Aufgabe 1. Wie viele verschiedene Lösungen hat jede der folgenden Gleichungen in \mathbb{R} und wie viele in \mathbb{C} ?

a. $z^9 + 1 = 0$ b. $z^6 = \pi$ c. $z^8 + 2z^4 + 1 = 0$
d. $z^8 - 2z^4 + 1 = 0$ e. $z^8 - 2z^4 + 2 = 0$ f. $z^4 - z^2 + 1 = 0$
g. $(z^2 + z + 1)^2 (z^2 - z + 1)^2 = 0$

Aufgabe 2. Man definiert $\binom{z}{n} := \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z-k}{n-k}$. Welche Lösungen hat $\binom{z+i}{8} = 0$?

Aufgabe 3. Beschreiben und skizzieren Sie für $A = \{z \in \mathbb{C}; |z-i| = 2\}$ und

$$f_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f_a(z) = (1+i)z,$$
$$f_b : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f_b(z) = \frac{1}{z},$$

(a) $f_a(A)$; (b) $f_b(A)$; (c) $(f_a \circ f_b)(A)$; (d) $(f_b \circ f_a)(A)$.

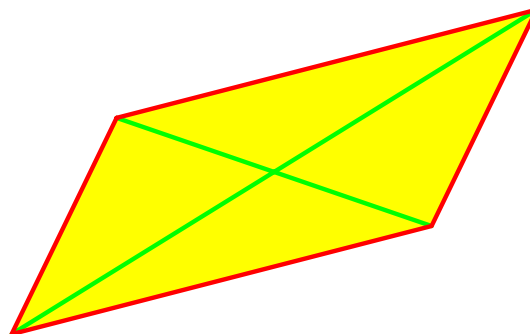
Aufgabe 4. Beschreiben und skizzieren Sie $g(\ell)$ für $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = z^2 \quad \text{und} \quad \ell = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z = 1\}.$$

Aufgabe 5. In der letzten Übung haben Sie das Parallelogrammgesetz bewiesen: für jede $w, z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z-w|^2 + |z+w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

Wieso heißt es Parallelogrammgesetz?



Aufgabe 6. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $a_i \in \mathbb{C}$ mit $|a_i| < 1$. Setze $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$. Zeige, dass alle Lösungen von $P(z) = 0$ innerhalb vom Kreis $|z| = n$ liegen.