Prof. Dr. Guido Sweers
Jiří Horák, Ph.D. **WS 2006/07**

Analysis I
Übungsblatt 5

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 20.11.06, 10:15 Uhr besprochen.

Aufgabe 1. Geben Sie Polynome p und r an, wobei r den kleinst möglichen Grad hat, so, dass

$$x^9+x^8+x^7+x^2+x+1=p(x)\left(x^3+1\right)+r(x).$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie $z_1,z_2,z_3,z_4\in\mathbb{C}$ so, dass $(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)=z^4+4$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Abspaltung der Partialbrüche für

1. $f_1(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$,
2. $f_2(z)=\dfrac{z^2-1}{z^2+1}$,
3. $f_3(z)=\dfrac{z}{z^2-2z+1}$,
4. $f_4(z)=\dfrac{z^3}{z^2-2z+1}$.

Aufgabe 4. Wie sieht die Abspaltung der Partialbrüche aus für

1. $g_1(z)=\dfrac{z^8-1}{z^4-2z^2+1}$,
2. $g_2(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+1)^3(z^2+1)}$?

Hinweis: Nur die Form wird gesucht, Sie müssen die jeweiligen Konstanten nicht berechnen.

Aufgabe 5.

1. Seien p_1 und p_2 zwei Polynome vom Grad kleiner gleich n und so, dass es $z_0,z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$ (alle verschieden) gibt mit $p_1(z_i)=p_2(z_i)$ für alle $i\in\{0,\dots,n\}$. Zeige, dass $p_1(z)=p_2(z)$ für alle $z\in\mathbb{C}$.
2. Zeige, wenn p ein Polynom ist mit $p(x)\in\mathbb{R}$ für alle $x\in\mathbb{R}$, dass alle Koeffizienten von p reell sind.

Aufgabe 6. Sei q ein Polynom mit reellen Koeffizienten:

$$q(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\dots a_{n-1}x+a_n$$

mit $a_i\in\mathbb{R}$.

1. Zeige, dass es $x_i,b_i,c_i\in\mathbb{R}$ gibt, so dass
$$q(x)=(x-x_1)\dots(x-x_k)\left((x-b_1)^2+c_1^2\right)\dots\left((x-b_\ell)^2+c_\ell^2\right).$$
2. Entbinde $q(x)=x^8-1$ auf diese Art.

Aufgabe 7. Sei $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Zeige, dass das Polynom $p(x)=\begin{pmatrix}x\\k\end{pmatrix}$ als Funktion von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$ wohl definiert ist.