Prof. Dr. Guido Sweers
Jiří Horák, Ph.D. **WS 2006/07**

Analysis I
Übungsblatt 6

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 27.11.06, 10:15 Uhr besprochen.

Aufgabe 1. Benutze die Definition, zu zeigen, dass

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^4}{n^2-1} - \frac{n^4}{n^2+1}\right) = 2$.

Aufgabe 2. Man berechne den Grenzwert oder zeige, dass die Folge nicht konvergiert:

$a.\ \left\{\dfrac{2^n - n^2}{2^n + n^2}\right\}_{n=0}^{\infty}$; $\quad b.\ \left\{n^{-k}\dbinom{n}{k}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

$c.\ \left\{\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty}$; $\quad d.\ \left\{\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n!}\right\}_{n=0}^{\infty}$;

$e.\ \left\{\sqrt[n]{a^n+b^n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ für $a,b \in \mathbb{R}^+$; $\quad f.\ \left\{r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\tfrac{1}{n}\psi\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{n}\psi\right)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$;

$g.\ \left\{\sqrt{n+a} - \sqrt{n}\right\}_{n=[a]+1}^{\infty}$ für $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. Wahr oder unwahr? Man argumentiere. Die Folgen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ sind konvergent.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n+b_n)^2 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)^2$;
3. Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, dann $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^n = 1$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 4. Gebe eine divergente Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ an, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ existiert.

Aufgabe 5. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ sind zwei Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Man beweise oder gebe ein Gegenbeispiel:

1. $a_n \le b_n \Rightarrow a \le b$;
2. $a_n < b_n \Rightarrow a < b$.

Aufgabe 6. Berechne den Limes Superior und Limes Inferior von:

1. $\left\{\frac{2^{-n}+(-1)^n}{1+3^{-n}}\right\}_{n=0}^{\infty}$;
2. $\left\{\mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^n\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$.