Prof. Dr. Guido Sweers
Jiří Horák, Ph.D. **WS 2006/07**

Analysis I
Übungsblatt 7

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 04.12.06, 10:15 Uhr besprochen.

Aufgabe 1. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$a.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1};$ $b.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+2};$ $c.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+2n-1};$

$d.\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n;$ $e.\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+3i}{4-2i}\right)^{2n};$ $f.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2i}{1-n^3 i};$

$g.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{2}}{2^n};$ $h.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n!}{(1+n)!};$ $i.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{n^{n-1}};$

$j.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n};$ $k.\ \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{1+n^4}};$ $l.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{\sqrt{n}};$

$m.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!};$ $n.\ \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{4}{5}\right)^n;$ $o.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1\,000\,000)^n}{n!};$

$p.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^n};$ $q.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^3}.$

Aufgabe 2. Sei $\{a_n\}$ eine Folge komplexer Zahlen. Welche der folgenden Behauptungen ist richtig und welche falsch? Warum?

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}$ sind beide divergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist divergent;
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (a_k)^k$ ist konvergent;
3. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist bedingt konvergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}$ ist bedingt konvergent;
4. $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}$ ist bedingt konvergent und $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}$ ist absolut konvergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist bedingt konvergent.

Aufgabe 3. Es sind zwei reelle Folgen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ gegeben. Man zeige:

1. Sind die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2$ konvergent, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ absolut. (Hinweis: $(x \pm y)^2$.)
2. Mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} a_n$, falls $\alpha > \frac{1}{2}$ ist.

Man gebe ein Beispiel einer Folge, so dass

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ divergiert und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_n$ konvergiert;

4.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} a_n$ divergiert.

Aufgabe 4. Es sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine positive, monoton fallende Folge. Man beweise oder widerlege:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert;

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$;

4.* $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Hinweis: $a_{2n} \leq \frac{a_{n+1}+\ldots+a_{2n}}{n} \leq a_n$.

Aufgaben markiert mit * sind anspruchsvoller.