Prof. Dr. Guido Sweers
Jiří Horák, Ph.D. **WS 2006/07**

Analysis I
Übungsblatt 9

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 18.12.06, 10:15 Uhr besprochen.

Aufgabe 1. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, dass $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 2. Welche Grenzwerte existieren? Falls sie existieren, welchen Wert haben sie?

$$
\begin{array}{llll}
a. & \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x-4}{x-1} & b. & \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^{\frac{2}{3}}-9}{x^{\frac{1}{3}}-3} \\
c. & \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & d. & \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|2x-1|-|2x+1|}{x} \\
e. & \lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4}\right) & f. & \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{7+x}-3\sqrt{x-1}} \\
g. & \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}-1} & h. & \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\sqrt{x^2-x^4}
\end{array}
$$

Aufgabe 3. Sei $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ganzzahlfunktion (Entier-Funktion). Welche Grenzwerte existieren? Falls sie existieren, welchen Wert haben sie?

$$
a.\ \lim_{x\to 0} x\left[\tfrac{1}{x}\right] \qquad b.\ \lim_{x\to 0} \left(\left[\tfrac{1}{x}\right] - \tfrac{1}{x}\right) \qquad c.\ \lim_{x\downarrow 0} \sqrt{x}\left(\left[\tfrac{1}{x}\right] - \tfrac{1}{x}\right)
$$

Aufgabe 4. Folgende Abschätzungen dürfen Sie benutzen:

$$
\begin{array}{ccccll}
-1 & \le & \sin x & \le & 1 & \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \\
1 - \frac{1}{6}x^2 & \le & \dfrac{\sin x}{x} & \le & 1 & \text{für alle } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.
\end{array}
$$

1. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert $\lim\limits_{x\downarrow 0} x^\alpha \sin x$?

2. Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ existiert $\lim\limits_{x\downarrow 0} x^\beta \sin(\frac{1}{x})$?

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{\mathbb{C}\ni z\to i} \left(\dfrac{1-z^2}{1+z^2} + \dfrac{i}{z-i}\right)$ existiert.

Aufgabe 6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Wahr oder unwahr?

1. Wenn für jede reelle Folge $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ mit $a_n \neq x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ gilt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$ ist, dann gilt auch $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Wenn für jede reelle Folge $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ mit $a_n \neq x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ gilt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$ ist, dann gilt auch $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

3. Wenn für jede reelle Folge $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ mit $a_n \neq x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ gilt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$ ist, dann gilt auch $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

Zusatzaufgabe:

Aufgabe 7. Wir definieren

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{falls } x = \frac{n}{m} \text{ mit } n \in \mathbb{Z} \text{ und } m \in \mathbb{N}^+ \text{ und } \operatorname{ggT}(n,m) = 1, \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \end{cases}$$

wobei ggT den grössten gemeinsamen Teiler bezeichnet. Zeigen Sie:

1. Für jede $x_0 \in \mathbb{Q}$ gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

2. Für jede $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.