

Analysis I
Übungsblatt 1

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 22.10.2009 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass $(\sin(x))^2 + (\sin(x + \frac{2}{3}\pi))^2 + (\sin(x + \frac{4}{3}\pi))^2 = \frac{3}{2}$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{x^2-4}{|x|+2} > 2$?

Aufgabe 3. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^2-2} > 0$?

Aufgabe 4. Wir setzen $A = \{(x, y, z); |x| + |y| + |z| < 1\}$ und $B = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$. Gilt $A \subset B$ oder $B \subset A$? Skizzieren Sie beide Mengen.

Aufgabe 5. Beweisen Sie, dass $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{m+k+\ell=n \\ m,k,\ell \in \mathbb{N}}} \frac{n!}{m!k!\ell!} a^m b^k c^\ell.$$

Aufgabe 7. \mathcal{A} und \mathcal{B} seien zwei Aussagen. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \mathcal{A}$ eine wahre Aussage ist.

Aufgabe 8. Zeigen Sie $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \iff ((\neg \mathcal{A}) \vee \mathcal{B})$.

Aufgabe 9. Sind die folgenden Abbildungen jeweils injektiv/surjektiv/bijektiv? Beweisen Sie Ihre Antwort.

1. $f: \{x \in \mathbb{R}; x > 1\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R}; x > -1\}, f(x) = \frac{1}{x-1}$.

2. $g: \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$.

Aufgabe 10. Ist $h: \mathbb{Q} \rightarrow \{y \in \mathbb{Q}; y \geq 0\}, x \mapsto x^2$ surjektiv?