Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2009/10

Analysis I
Übungsblatt 10

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 07.01.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. **(4 Punkte)** Wahr oder falsch? Gegenbeispiel oder Beweis!

1. Es seien $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Funktionen mit $f(x)\le g(x)\le h(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Wenn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)$ existieren, dann existiert auch $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$, und es gilt
$$\lim_{x\to\infty} f(x)\le \lim_{x\to\infty} g(x)\le \lim_{x\to\infty} h(x).$$
2. Es seien $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Funktionen mit $f(x)\le g(x)\le h(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Wenn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)$ existieren und übereinstimmen, dann existiert auch $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$, und es gilt
$$\lim_{x\to\infty} f(x)= \lim_{x\to\infty} g(x)= \lim_{x\to\infty} h(x).$$
3. Es seien $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ wachsende Funktionen mit $g(x)\le h(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Wenn $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)$ existiert, dann existiert auch $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$, und es gilt
$$\lim_{x\to\infty} g(x)\le \lim_{x\to\infty} h(x).$$
4. Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig und $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen. Wenn es ein $a\in\mathbb{R}$ gibt mit $\lim\limits_{k\to\infty} f(a_k)=f(a)$, dann gilt auch $\lim\limits_{k\to\infty} a_k=a$.
5. * Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig und injektiv und $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen. Wenn es ein $a\in\mathbb{R}$ gibt mit $\lim\limits_{k\to\infty} f(a_k)=f(a)$, dann gilt auch $\lim\limits_{k\to\infty} a_k=a$.

Aufgabe 2. **(6 Punkte)** Welche Grenzwerte existieren? Welchen Wert haben sie, falls sie existieren?

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\exp(x)-5x^3}{4x^2+2x+7}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-2|x|(x+1)+3\right)\exp(x)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}\qquad (n\in\mathbb{N}\setminus\{0\})$

d) $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0}\frac{2\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{\exp\left(\frac{1}{x}\right)+1}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-\sqrt[4]{x}}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{2-\left|x^2+3x\right|}{5-|2x+1|+x}$

Aufgabe 3. **(2 Punkte)** Beweisen Sie, dass $p(x)=x^3-4x-2$ drei reelle Nullstellen hat.

(bitte wenden)

Aufgabe 4. **(8 Punkte)** Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen. Untersuchen Sie dabei insbesondere Schnittpunkte mit den Achsen und (mit Beweis) das Verhalten an den Definitionslücken sowie für $x \to \pm\infty$.

a) $f(x) = \dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^2-x-2}$

b) $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}$

c) $h(x) = \sqrt[3]{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$

e) $i(x) = \dfrac{x^3-x}{|x^2-1|}$

Aufgabe 5. * Wir beweisen die Stetigkeit der Funktion $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^q$ für $q \in \mathbb{Q}$.

1. Für $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $a, b \geq 0$ gilt die Ungleichung

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k} \geq a^m + b^m,$$

   und deshalb auch $a + b \geq \sqrt[m]{a^m + b^m}$. Zeigen Sie, dass für $0 \leq x < y$ die folgende Ungleichung gilt:

$$0 \leq \sqrt[m]{y} - \sqrt[m]{x} \leq \sqrt[m]{y-x}.$$

2. Sei $q \in \mathbb{Q}^+$. Zeigen Sie, dass $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^q$ stetig auf $[0,\infty)$ ist.
3. Sei $q \in \mathbb{Q}^-$. Zeigen Sie, dass $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^q$ stetig auf $(0,\infty)$ ist.

Aufgabe 6. * Es sei $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen.

1. Es sei $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \ell$. Wie lautet der Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$?
2. Es sei $\limsup\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \ell$. Was kann man nun über den Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ aussagen?
3. Bestimmen Sie für die untenstehenden Folgen jeweils den Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

i) $a_k = 3^{\left[\frac{k}{2}\right]} k$

ii) $a_k = \sqrt{1+k^2} + (-1)^k k$

iii) $a_k = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } k, \\ 1 & \text{für ungerade } k. \end{cases}$

Aufgabe 7. * Konvergent oder divergent?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n)!}$$

*unbewertete Zusatzaufgabe