Prof. Guido Sweers
Matthias Erven **WS 2009/10**

Analysis I
Übungsblatt 11

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 14.01.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. **(4 Punkte)** Berechnen Sie die Ableitung.

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cot(x)$.
2. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = 5z^3 - 2z$.
3. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2\exp(\sin(\frac{1}{x}))$.
4. $^*f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cot\left(1 + \frac{x^2}{\cosh(x^3)}\right)$.
5. $f : \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\sin(x))^{n^2}$.

Aufgabe 2. **(2 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^q$ für $q \in \mathbb{Q}$ differenzierbar ist. Wie lautet die Ableitung?
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $x \mapsto x^{\frac{1}{m}}$ differenzierbar ist für $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Verwenden Sie dabei, dass

$$\left(y^{\frac{1}{m}} - x^{\frac{1}{m}}\right)\left(y^{\frac{m-1}{m}} + y^{\frac{m-2}{m}}x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{m-3}{m}}x^{\frac{2}{m}} + \dots + y^{\frac{1}{m}}x^{\frac{m-2}{m}} + x^{\frac{m-1}{m}}\right) = y - x$$

gilt. Betrachten Sie danach $x \mapsto x^q$ für allgemeines $q \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 3. **(2 Punkte)** Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an f an der Stelle a.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(z) = z^3$ und $a = 2$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{2+\sin(x)}{2+\cos(x)}$ und $a = \frac{\pi}{4}$.
3. $^*f : \mathbb{R} \setminus \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \tan(x)$ und $a = 1$.

Aufgabe 4. **(2 Punkte)** Für welche $s, t \in \mathbb{R}$ ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} s\frac{\exp(x^2) - x^2 - 1}{x^3} & \text{für } x < 0 \\ 2x + t & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

eine differenzierbare Funktion?

Aufgabe 5. **(1 Punkt)** Skizzieren Sie die Menge $\{\exp(it); 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

(bitte wenden)

---

*unbewertete Zusatzaufgabe

Aufgabe 6. **(6 Punkte)** Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass f eine horizontale Asymptote hat.
2. Zeigen Sie, dass f stetig ist.
3. Skizzieren Sie den Graphen von f.
4. Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist.
5. Ist f stetig differenzierbar?
6. Zeigen Sie, dass f keine Lipschitz-Bedingung auf $\mathbb{R}$ erfüllt.

Aufgabe 7. **(3 Punkte)** *Betzsches Gesetz*
In seinem Buch *Wind-Energie und ihre Ausnutzung durch Windmühlen* aus dem Jahr 1926 beschäftigt sich Albert Betz mit der Energiegewinnung durch Windkraftanlagen. Dabei stellt er folgende Überlegungen an: Die Leistung (Energie pro Zeit) von Wind der Geschwindigkeit v_1, der durch eine Fläche der Größe F strömt, ist

$$P_{\text{Wind}} = \frac{1}{2} m v_1^2,$$

wobei m die Masse an Luft pro Sekunde (Massenstrom) bezeichnet. Für diese gilt bei einer Luftdichte ρ

$$m = \rho F v_1.$$

Strömt der Wind durch die Rotorblätter, wird die Luft abgebremst. Weit hinter der Windkraftanlage hat sie also eine Geschwindigkeit $v_2 < v_1$. Man nimmt nun an, dass die Geschwindigkeit in der Ebene der Rotorblätter bzw. Windmühlenflügel genau dem Durchschnitt von Anfangs- und Endgeschwindigkeit entspricht, also $\frac{v_1+v_2}{2}$. Der Luftmassenstrom durch die vom Rotor überstrichene Fläche F ist dann

$$\tilde{m} = \rho F \frac{v_1 + v_2}{2},$$

und für die dem Wind entnommene Leistung erhält man

$$P_{\text{nutz}} = \frac{1}{2} \tilde{m} \left(v_1^2 - v_2^2\right).$$

Bemerkung: Die Herleitung dieser physikalischen Aussagen liegt in der Verantwortung von Physikern.

1. Stellen Sie eine Formel für den Erntegrad $\frac{P_{\text{nutz}}}{P_{\text{Wind}}}$ einer Windkraftanlage auf, die nur vom Verhältnis $\frac{v_2}{v_1}$ der Anfangswindgeschwindigkeit zur Endgeschwindigkeit abhängt.
2. Für welches Verhältnis $\frac{v_2}{v_1}$ ist der Erntegrad optimal? Wie viel der im Wind vorhandenen Leistung kann man also maximal „ernten“?

Sonderübung am 25. Januar
Einige Übugnsleiter bieten zusammen eine Sonderübung an. Diese findet am 25. Januar um 18 Uhr im Hörsaal das Mathematischen Instituts statt und ist für alle offen. Es werden auf Wunsch alte Klausuraufgaben besprochen und Fragen zum Stoff beantwortet. Wenn Sie konkrete Wünsche haben, was behandelt werden soll, so senden Sie diese bitte vorher an David Fritz (E-Mail-Adresse siehe Webseite zur Vorlesung).