Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2009/10

Analysis I
Übungsblatt 12

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 21.01.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. **(3 Punkte)** Berechnen Sie die Extrema von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \left(x - x^2\right) e^{\frac{x-1}{x}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Welche sind global?

Aufgabe 2. **(1 Punkt)** Benutzen Sie den Mittelwertsatz für die Berechnung von

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \left(\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{x+1}\right) \right).$$

Aufgabe 3. **(1 Punkt)** Es sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^x$. Berechnen Sie die Ableitung.

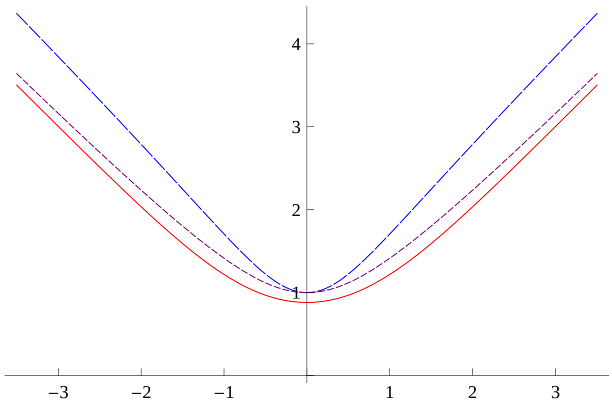
Aufgabe 4. **(4 Punkte)** Geben Sie das Definitionsgebiet an und skizzieren Sie die folgenden Funktionen:

1. $x \mapsto \arcsin(\sin(x))$;
2. $x \mapsto \sin(\arcsin(x))$;
3. $x \mapsto \arccos(\cos(x))$;
4. $x \mapsto \operatorname{arccot}(\cot(x))$.

Welche dieser Funktionen sind periodisch und mit welcher (kleinsten) Periode?

Aufgabe 5. **(2 Punkte)** Die Funktionen

1. $x \mapsto \operatorname{arcsinh}(\cosh(x))$,
2. $x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + 1$ und
3. $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$



sind hier skizziert. Welche Skizze gehört zu welcher Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort ohne Taschenrechner.

Aufgabe 6. **(1 Punkt)** Wir betrachten alle Geraden, die zwei verschiedene Punkte $(x, \arctan(x))$ und $(y, \arctan(y))$ verbinden. Welche Steigungskoeffizienten können diese Geraden haben?

(bitte wenden)

Aufgabe 7. **(4 Punkte)** Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Berechnen Sie, wenn es existiert:

1. $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\downarrow 0} f(x)$ und $\lim_{x\uparrow 0} f(x)$;
2. $f'(x)$ für $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$;
3. $f'_+(0)$, $f'_-(0)$, $f'_+(1)$ und $f'_-(1)$;
4. $\lim_{x\downarrow 0} f'(x)$, $\lim_{x\uparrow 0} f'(x)$, $\lim_{x\downarrow 1} f'(x)$ und $\lim_{x\uparrow 1} f'(x)$.

Aufgabe 8. **(2 Punkte)** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gelte $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f'(0) = 0$ ist. Liegt ein Extremum in $x = 0$ vor?

Aufgabe 9. **(2 Punkte)** Die Lambertsche W-Funktion $w : [\ldots,\infty) \to \mathbb{R}$ wird definiert als die Umkehrfunktion zu $f : [\ldots,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = xe^x$. An den Stellen mit $\ldots$ stehen die kleinstmöglichen Zahlen. Berechnen Sie diese. Berechnen Sie auch $w'(0)$.

Anmeldung zur Klausur
Wer an der Klausur am 6. Februar teilnehmen möchte, melde sich bitte bis Dienstag, den 2. Februar über die Vorlesungswebseite an.

Raumänderung Gruppe 4 (Anne Ludwig)
Die Übungen von Gruppe 4 (Anne Ludwig) finden am 18. Januar in Raum 701 im Pavillon der Humanwissenschaftlichen Fakultät (Gronewaldstr. 2a) und am 25. Januar im Hörsaal E im Hörsaalgebäude statt.