Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2009/10

Analysis I
Übungsblatt 13

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 28.01.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. **(4 Punkte)** Wir betrachten $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x$. Sei $\varepsilon>0$. Finden Sie eine Untersumme und eine Obersumme bezüglich f auf $[0,1]$ (mit den dazu gehörenden Treppenfunktionen), die sich um weniger als ε unterscheiden.

Aufgabe 2. **(5 Punkte)** Wir betrachten die Funktion $f:\left(e^{-1},\infty\right)\to\mathbb{R}$, die gegeben ist durch

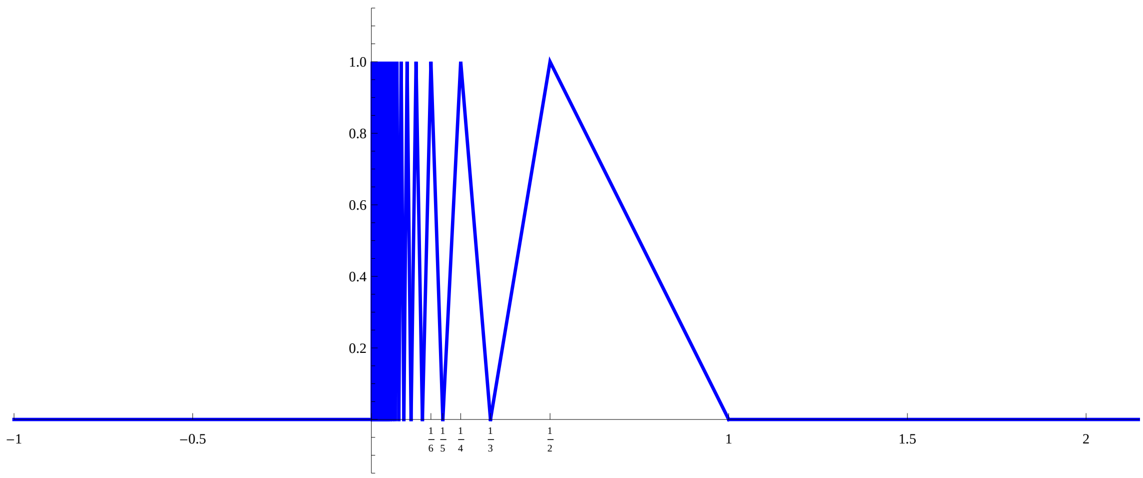
$$f(x)=\frac{1}{\ln(x)+1}.$$

Berechnen Sie für $n=0,\dots,3$ das Taylorpolynom t_n um 1 vom Grad n. Berechnen Sie für $a=1.1$, um welchen Betrag sich $f(a)$ und $t_n(a)$ jeweils maximal unterscheiden können. Wie groß kann der Unterschied jeweils für $b=2$ werden?

Unbewertete Zusatzaufgabe: Lassen Sie von einem Computeralgebrasystem wie Maple oder Mathematica eine Skizze der Funktion und der Taylorpolynome anfertigen.

Aufgabe 3. **(3 Punkte)** Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x)=\begin{cases}\left(x-\frac{1}{2n+1}\right)2n\,(2n+1) & \text{wenn } x\in\left[\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}\right) \text{ mit } n\in\mathbb{N}^+,\\ \left(\frac{1}{2n-1}-x\right)2n\,(2n-1) & \text{wenn } x\in\left[\frac{1}{2n},\frac{1}{2n-1}\right) \text{ mit } n\in\mathbb{N}^+,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$



Sie ist in obenstehender Abbildung skizziert. Geben Sie den Wert von

$$\int_0^2 f(x)\,dx$$

an. Eine anschauliche Begründung reicht hier.

(bitte wenden)

Aufgabe 4. **(3 Punkte)** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}\sin\left(\sqrt{-x}\right) & \text{für } x < 0, \\ \sqrt{x}\sinh\left(\sqrt{x}\right) & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass f unendlich oft differenzierbar ist.
2. Geben Sie die zugehörigen Taylorpolynome $t_n(x)$ um $x = 0$ an.
3. Geben Sie Argumente an, wieso für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - t_n(x)| = 0\ .$$

Aufgabe 5. **(2 Punkte)** Berechnen Sie die Taylorreihe von

1. $g(x) = x^2 e^x - 2x$ um $x = 2$.
2. $^*f(x) = \cos(x)$ um $x = \frac{\pi}{2}$,

Aufgabe 6. **(3 Punkte)** Finden Sie eine Funktion $F : \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \to \mathbb{R}$, so dass

$$F'(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 + x - 2}$$

gilt. Ist diese Funktion eindeutig bestimmbar?
Hinweis: $(\ln|x+a|)' = \frac{1}{x+a}$.

Erneute Raumänderung Gruppe 4 (Anne Ludwig):
Anders als vorher angekündigt findet die Übung von Gruppe 4 (Anne Ludwig) am 25. Januar im Kleinen Hörsaal der Biologie (Ecke Gyrhofstr./Weyertal, gegenüber des Evangelischen Krankenhauses) statt.

*unbewertete Zusatzaufgabe