**Prof. Guido Sweers**
**Matthias Erven** **WS 2009/10**

# Analysis I
## Übungsblatt 2

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 29.10.2009 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

**Aufgabe 1.** Wir betrachten die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $a_0 = 1$ und

$$a_{n+1} = \frac{3a_n^2+2}{4a_n} \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

1. Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definiert durch
$$f(x) = \frac{3x^2+2}{4x}.$$
Zeigen Sie, dass $f$ wachsend[1] ist auf $[1,\infty)$ und dass für alle $x \in \left[1,\sqrt{2}\right]$ gilt $f(x) \in \left[1,\sqrt{2}\right]$.

2. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $a_n \in \left[1,\sqrt{2}\right]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe 2.** Wir haben $\mathbb{R}$ eingeführt durch Äquivalenzklassen beschränkter wachsender Folgen: $\mathbb{R} := (\mathfrak{F},\sim)$.

1. Überlegen Sie sich, wie man zu einem Element $x \in (\mathfrak{F},\sim)\setminus\{0\}$ das multiplikativ inverse Element $x^{-1}$ definieren kann.

2. Überlegen Sie sich, wie man den Quotienten zweier Elemente $x,y \in (\mathfrak{F},\sim)$ mit $y \neq 0$ definieren kann.

**Aufgabe 3.** Skizzieren Sie jeweils die Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für die gilt:

a) $|x+1|+|y-1| = 2$ b) $\sqrt{|x+1|}+\sqrt{|y-1|} = \sqrt{2}$

**Aufgabe 4.** Sie haben bereits folgende Formeln kennengelernt:

$$1+2+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

Man kann sich nun fragen, ob dies sich fortsetzen lässt. Ist also

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)?$$

Die Antwort lautet: Ja. Zeigen Sie noch allgemeiner, dass für $n,m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\prod_{l=0}^{m}(k+l) = \frac{1}{m+2}\prod_{l=0}^{m+1}(n+l).$$

Dabei definiert man $\prod_{l=0}^{m} a_l := a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_m$.

**Hinweis:** Ab der kommenden Woche findet die Übung von Gruppe 18 (David Fritz) im Raum 324 der Humanwissenschaftlichen Fakultät statt.

---

[1] Eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *wachsend*, wenn für $x_1,x_2 \in I$ aus $x_1 \leq x_2$ folgt, dass $f(x_1) \leq f(x_2)$ ist.