

Analysis I
Übungsblatt 3

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 05.11.2009 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Schreiben Sie in der Form $x + iy$:

$$\begin{array}{lll} a. (2-3i)(1+i) & b. \frac{1}{3-4i} & c. \frac{4-3i}{1-2i} \\ d. \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5 & e. \frac{(1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{28}} & f. \left(\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{8}\pi\right)\right)^{12} \end{array}$$

Aufgabe 2. Man löse für $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{lll} a. z^4 = 1 & b. z^2 + 3z + 4 = 0 & c. z^2 - 2iz = 4 - 4i \\ d. z^4 + 4 = 0 & e. z^2 + 2iz + 5 = 0 & f. z^3 = -2 + 2i \end{array}$$

Aufgabe 3. Man skizziere die folgenden Mengen:

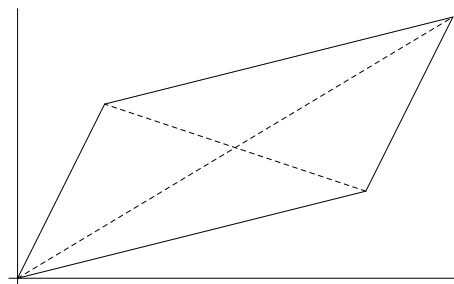
1. $\operatorname{Re} z = 2\operatorname{Im} z$,
2. $|z-1| = |z-i|$,
3. $\operatorname{Re} z = |z| + 1$,
4. $|z-i| = 2|z+i|$,
5. $\operatorname{Arg}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{1}{4}\pi$.

Aufgabe 4.

1. Man beweise für $z, w \in \mathbb{C}$:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

2. Was kann man damit für die Längen in diesem Bild behaupten?



Aufgabe 5. Seien $a, w \in \mathbb{C}$ mit $|a| \neq 1$ und $|w| = 1$. Zeigen Sie, dass $f: \mathbb{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = w \frac{1-z\bar{a}}{z-a}$ die Menge $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ auf sich selber abbildet.

Aufgabe 6. *Seien $a, b, w \in \mathbb{C}$ mit $w \neq 0$, $a \neq b$. Zeigen Sie, dass $f: \mathbb{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = w \frac{z-b}{z-a}$ jeden Kreis und jede Gerade in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ auf einen Kreis oder eine Gerade abbildet.

*unbewertete Zusatzaufgabe