

Analysis I  
Übungsblatt 3

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 05.11.2009 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

**Aufgabe 1.** Schreiben Sie in der Form  $x + iy$ :

$$\begin{array}{lll} a. (2-3i)(1+i) & b. \frac{1}{3-4i} & c. \frac{4-3i}{1-2i} \\ d. \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5 & e. \frac{(1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{28}} & f. \left(\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{8}\pi\right)\right)^{12} \end{array}$$

**Aufgabe 2.** Man löse für  $z \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{array}{lll} a. z^4 = 1 & b. z^2 + 3z + 4 = 0 & c. z^2 - 2iz = 4 - 4i \\ d. z^4 + 4 = 0 & e. z^2 + 2iz + 5 = 0 & f. z^3 = -2 + 2i \end{array}$$

**Aufgabe 3.** Man skizziere die folgenden Mengen:

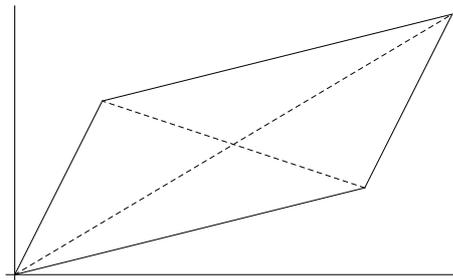
1.  $\operatorname{Re} z = 2\operatorname{Im} z$ ,
2.  $|z-1| = |z-i|$ ,
3.  $\operatorname{Re} z = |z| + 1$ ,
4.  $|z-i| = 2|z+i|$ ,
5.  $\operatorname{Arg}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{1}{4}\pi$ .

**Aufgabe 4.**

1. Man beweise für  $z, w \in \mathbb{C}$ :

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

2. Was kann man damit für die Längen in diesem Bild behaupten?



**Aufgabe 5.** Seien  $a, w \in \mathbb{C}$  mit  $|a| \neq 1$  und  $|w| = 1$ . Zeigen Sie, dass  $f: \mathbb{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = w \frac{1-z\bar{a}}{z-a}$  die Menge  $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$  auf sich selber abbildet.

**Aufgabe 6.** \*Seien  $a, b, w \in \mathbb{C}$  mit  $w \neq 0$ ,  $a \neq b$ . Zeigen Sie, dass  $f: \mathbb{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = w \frac{z-b}{z-a}$  jeden Kreis und jede Gerade in  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$  auf einen Kreis oder eine Gerade abbildet.

---

\*unbewertete Zusatzaufgabe