Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2009/10

Analysis I
Übungsblatt 4

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 12.11.2009 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

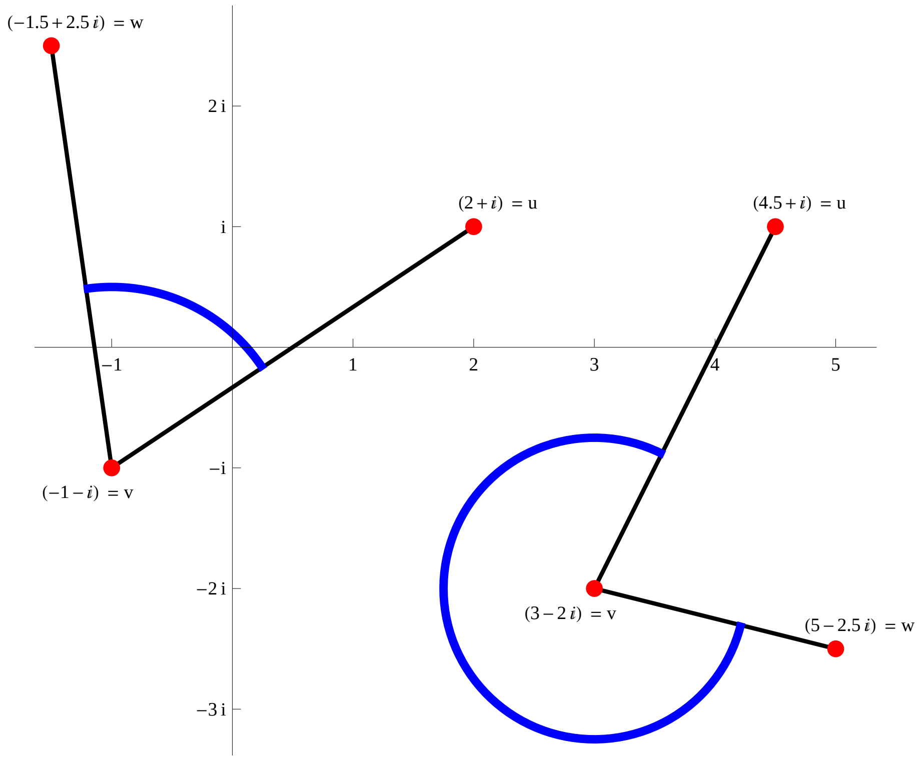
Aufgabe 1. Wie viele verschiedene Lösungen hat jede der folgenden Gleichungen in $\mathbb{R}$ und wie viele in $\mathbb{C}$?

$a.\ z^9+1=0$ $\quad b.\ z^6=\pi$ $\quad c.\ z^8+2z^4+1=0$
$d.\ z^8-2z^4+1=0$ $\quad e.\ z^8-2z^4+2=0$

Aufgabe 2. Seien u,v,w drei verschiedene komplexe Zahlen.

1. Es sei φ der Winkel, den man erhält, wenn man u,v und w in ein Koordinatensystem einzeichnet und die Verbindungsstrecke von v nach u als ersten Schenkel und die von v nach w als zweiten Schenkel wählt (s. Skizze). Zeigen Sie, dass gilt:

$$\varphi = Arg\left(\frac{w-v}{u-v}\right)$$



2. Seien $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ mit $\alpha\neq 0$ und sei $f(z)=\alpha z+\beta$. Zeigen Sie, dass f die Winkel erhält, dass also für alle $u,v,w\in\mathbb{C}$ mit $u\neq v\neq w$ gilt:

$$Arg\left(\frac{w-v}{u-v}\right) = Arg\left(\frac{f(w)-f(v)}{f(u)-f(v)}\right)$$

(bitte wenden)

Aufgabe 3. Es seien $A = \{z \in \mathbb{C}; |z - i| = 2\}$ und

$$f_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f_a(z) = (1-i)\,z,$$
$$f_b : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f_b(z) = \frac{1}{z}.$$

Beschreiben und skizzieren Sie mit Begründung

(a) $f_a(A)$; (b) $f_b(A)$; (c) $(f_a \circ f_b)(A)$; (d) $(f_b \circ f_a)(A)$.

Aufgabe 4. Sei $0 < a < \frac{1}{2}\ell$ und außerdem

$$E := \{z \in \mathbb{C}; |z - a| + |z + a| = \ell\}.$$

1. Zeigen Sie, dass die Menge E eine Ellipse darstellt mit 0 als Zentrum. Die Gleichung einer „horizontalen“ Ellipse um $(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$ ist

$$\left(\frac{x}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_2}\right)^2 = 1.$$

2. Seien $u, v \in \mathbb{C}$ und $r > |u - v|$. Es sei

$$S := \{z \in \mathbb{C}; |z - u| + |z - v| = r\}.$$

Berechnen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha \neq 0$ und $a, l \in \mathbb{R}$ so, dass $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \alpha z + \beta$ die Menge S genau auf E abbildet: $f(S) = E$.

Aufgabe 5. Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $a_i \in \mathbb{C}$ mit $|a_i| < 1$. Sei $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$. Zeigen Sie, dass alle Lösungen von $P(z) = 0$ innerhalb des Kreises $|z| = n$ liegen.