

Analysis I  
Übungsblatt 5

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 19.11.2009 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

**Aufgabe 1.**

1. Sei  $\varepsilon > 0$ . Berechnen Sie ein  $N_\varepsilon$  so, dass

$$\left| \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} - 1 \right| < \varepsilon$$

gilt für  $n > N_\varepsilon$ .

Sie haben also bewiesen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \dots = \dots$$

2. Benutzen Sie die Definition von Konvergenz, um zu zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} = 0.$$

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie den Grenzwert oder zeigen Sie, dass die Folge nicht konvergiert:

$$\begin{aligned} a. & \left\{ n^{-k} \binom{n}{k} \right\}_{n=1}^{\infty}; & b. & \left\{ \frac{n^4}{n^2-1} - \frac{n^4}{n^2+1} \right\}_{n=2}^{\infty}; \\ c. & \left\{ \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^n \right\}_{n=0}^{\infty}; & d. & \left\{ \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{n!} \right\}_{n=0}^{\infty}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 3.**

1. Die Folge  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  sei konvergent. Sind die folgenden Behauptungen jeweils wahr oder unwahr? Man argumentiere.

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ;

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

2. Geben Sie (mit Beweis) eine divergente Folge  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  an, so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  existiert.

**Aufgabe 4.**

1. Geben Sie (mit Beweis) ein Beispiel einer konvergenten Folge  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  an, für die  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Arg}(z_n)$  nicht konvergiert.
2. Geben Sie (mit Beweis) ein Beispiel einer divergenten Folge  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  an, für die  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Arg}(z_n)$  konvergiert.

(bitte wenden)

**Aufgabe 5.** Berechnen Sie den Limes Superior und Limes Inferior von:

1.  $\left\{ \left| 2 + \frac{i^n}{n} \right| \right\}_{n=1}^{\infty}$ ;

2.  $\left\{ \cos \left( \frac{n(n+1)}{2} \pi \right) \right\}_{n=0}^{\infty}$ ;

3.  $\left\{ \frac{2^{-n} + (-1)^n}{1 + 3^{-n}} \right\}_{n=0}^{\infty}$ ;

4.  $\left\{ \operatorname{Re} \left( \left( \frac{1}{2} \sqrt{2} + i \frac{1}{2} \sqrt{2} \right)^n \right) \right\}_{n=0}^{\infty}$ .