Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2009/10

Analysis I
Übungsblatt 6

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 26.11.2009 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1.

1. Bestimmen Sie Polynome p und r, wobei r den kleinstmöglichen Grad hat, so dass
$$x^9+x^7+x^6+x^2+x+1=p(x)\left(x^3+1\right)+r(x).$$
2. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von $\frac{z^2+4}{z^2-4}$.
3. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von $\frac{z^3}{z^2+2z+1}$.
4. Wie sieht die Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{(z+1)(z-1)^3(z^2+1)}$ aus? Hier reicht es, nur die Form anzugeben und nicht die jeweiligen Konstanten auszurechnen.

Aufgabe 2.

1. Es seien p_1 und p_2 zwei Polynome vom Grad kleiner gleich n. Außerdem gebe es $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ (alle verschieden) mit $p_1(z_i) = p_2(z_i)$ für alle $i \in \{0,\ldots,n\}$. Zeigen Sie, dass dann $p_1(z) = p_2(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
2. Es sei p ein Polynom mit $p(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass alle Koeffizienten von p reell sind.

Aufgabe 3. Sei q ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$, also $q(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots a_{n-1}x + a_n$.

1. Zeigen Sie, dass es $x_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ gibt, so dass
$$q(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_k)\left((x-b_1)^2+c_1^2\right)\ldots\left((x-b_\ell)^2+c_\ell^2\right).$$
2. Zerlegen Sie $q(x) = x^6-1$ auf diese Art.

Aufgabe 4. Es sei $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Die Folge konvergiert gegen a.
2. Jede Teilfolge konvergiert gegen a.
3. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Aufgabe 5. *Die logistische Gleichung*
Es seien $r > 0$ und $x_0 \in (0,1)$. Man definiert die Folge $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ rekursiv durch
$$x_{n+1} := rx_n(1-x_n).$$

(bitte wenden)

1. Zeigen Sie, dass die Folge für $r \leq 4$ mindestens einen Häufungswert haben muss.
   Hinweis: Zeigen Sie, dass die Folge beschränkt ist. Was folgt daraus?

2. Zeigen Sie für $0 < r \leq 4$ und beliebigen Startwert $x_0 \in (0,1)$: Wenn die Folge konvergiert, dann muss der Grenzwert 0 oder $1 - \frac{1}{r}$ sein.

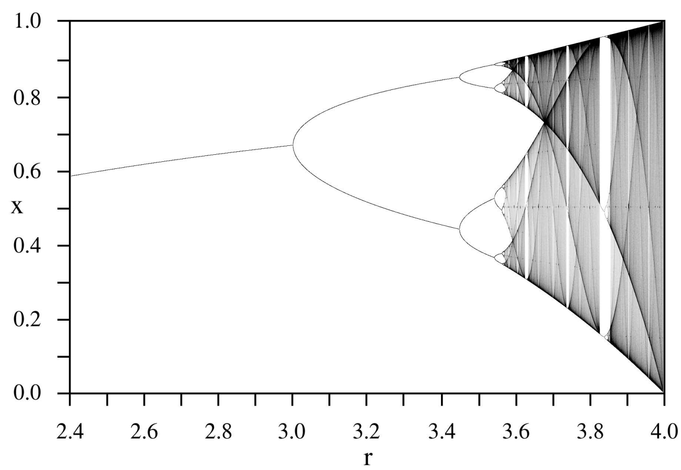
Tatsächlich hängt die Anzahl der Häufungswerte und das Konvergenzverhalten stark von der Wahl von r ab.

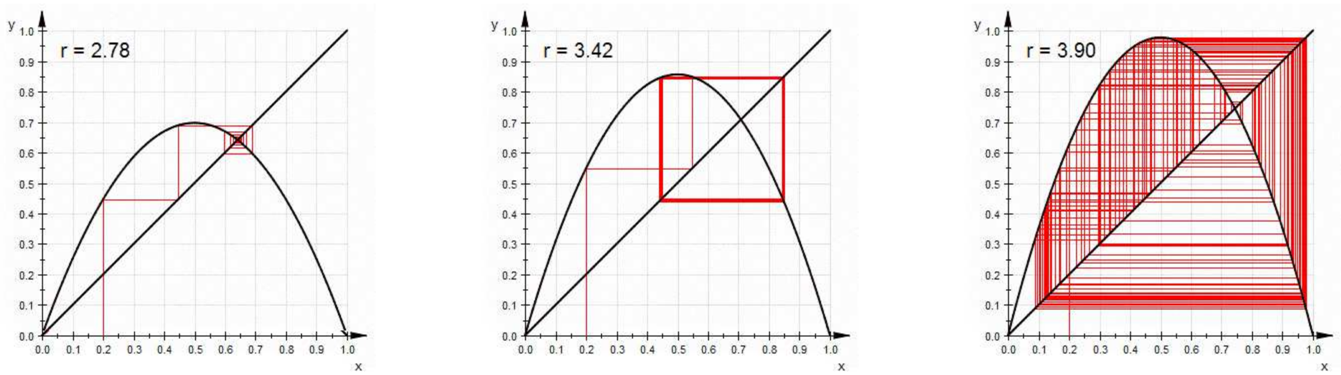
3. Zeigen Sie, dass für $0 < r \leq 1$ und jeden beliebigen Startwert $x_0 \in (0,1)$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
   Hinweis: Zeigen Sie, dass die Folge fallend ist.

Weiter kann man folgende Aussagen treffen:

- Für $1 < r \leq 3$ konvergiert die Folge gegen $1 - \frac{1}{r}$.
- Für $3 < r < 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$ gibt es Startwerte $x_0 \in (0,1)$, für die die Folge nicht konvergiert, sondern zwei Häufungswerte hat.
- Für größere r treten dann vier Häufungswerte, für noch größere r acht Häufungswerte auf usw. bis $r \approx 3.57$.
- Ab $r \approx 3.57$ tritt chaotisches Verhalten auf, es lässt sich keine Anzahl an Häufungspunkten mehr bestimmen. Außerdem hängt das Verhalten der Folge stark vom Startwert x_0 ab.
- Für $r > 4$ ist die Folge nicht mehr unbedingt beschränkt.

Dieses Verhalten wird in nebenstehendem *Bifurkationsdiagramm* veranschaulicht, in dem die Häufungswerte für $x_0 = 0.25$ in Abhängigkeit von r dargestellt sind.
Das Bild ist dem englischsprachigen Wikipedia-Eintrag zum Thema „logistic map" entnommen. Dort findet man auch untenstehende Bilder, die das Verhalten der Folge für verschiedene r und den Startwert $x_0 = 0.2$ illustrieren.





4. Erläutern Sie diese Bilder und erklären Sie, inwiefern sie obige Aussagen bestätigen.