Prof. Guido Sweers
Matthias Erven **WS 2009/10**

Analysis I
Übungsblatt 7

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 03.12.2009 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. **(10 Punkte)** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$a.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2n^3+1};\qquad b.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+2};\qquad c.\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+4i}{4-3i}\right)^{2n};$$

$$d.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2-2i}{1+n^3i};\qquad e.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2+n!}{(2+n)!};\qquad f.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n};$$

$$g.\ \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{1+n^4}};\qquad h.\ \sum_{n=0}^{\infty}n^2\left(\frac{3}{4}\right)^n;\qquad i.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1\,000\,000\,000)^n}{n!};$$

$$j.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n+1)!}{(n!)^3}.$$

Aufgabe 2. **(6 Punkte)** Seien $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ Folgen komplexer Zahlen. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Behauptungen wahr oder falsch sind. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

1. Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k)^k$.
2. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}$ beide divergent sind, ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.
3. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bedingt konvergent ist, dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}$ bedingt konvergent.
4. Wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein N_ε existiert, so dass $|a_{n+1}-a_n| < \varepsilon$ gilt für alle $n > N_\varepsilon$, dann konvergiert die Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.
5. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2$ absolut konvergieren, so konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$. *Hinweis:* $(x \pm y)^2$.
6. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ absolut konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_n$.

Aufgabe 3. **(4 Punkte)** Wir definieren die Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ durch

$$a_n := \operatorname{Arg}\left(\prod_{k=0}^{n}(k+i)\right).$$

Sei $a \in [0, 2\pi]$. Argumentieren Sie, warum es eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ gibt mit

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$