Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2009/10

Analysis I
Übungsblatt 8

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 10.12.2009 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie den Konvergenzradius von

$$a.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n^2-\frac{3}{2}}z^n; \qquad b.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}z^{2n}; \qquad c.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}z^{n!};$$

$$d.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^{n!}}z^{n!}; \qquad e.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{4n}.$$

Aufgabe 2.

1. Untersuchen Sie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ auf Konvergenz. *Hinweis:* Denken Sie an Bernoulli!
2. Geben Sie die Binomialentwicklung von $(1+x)^{\frac{1}{4}}$ an.
3. Wie kann man $\left(\frac{25}{4}\right)^i$ definieren? Berechnen Sie die ersten drei Summanden der Binomialreihe.

Aufgabe 3. In der Vorlesung haben Sie folgendes Lemma behandelt:

Seien $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ zwei (komplexe) Folgen. Wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_k$ absolut konvergent sind, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=0}^{k}a_m b_{k-m}\right)=\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k\right)\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}b_k\right).$$

1. Dieses Lemma wurde für den Fall gezeigt, dass $a_n, b_n \geq 0$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie es nun für allgemeine komplexe Folgen.
   Hinweis: Schreiben Sie
   $$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=0}^{k}a_m b_{k-m}\right)=\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}b_k\right)-S_n.$$
   Überlegen Sie sich, dass
   $$|S_n| \leq \left(\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]-1}^{n}|a_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{n}|b_k|\right)+\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|\right)\left(\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]-1}^{n}|b_k|\right)$$
   gilt. Zeigen Sie dann, dass $\lim_{n\to\infty}S_n = 0$ ist.
2. Untersuchen Sie, ob die Folgerung des Lemma auch für $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ gilt.

(bitte wenden)

Aufgabe 4. Wir betrachen die durch $a_n := \frac{(-1)^n}{n}$ gegebene Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1. Zeigen Sie, dass die Reihe konvergiert.
2. Wie könnte man eine Umordnung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konstruieren, damit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = 2$$

gilt? Welche reellen Zahlen kann man durch geschickte Umordnung als Grenzwert erhalten? Eine gute Argumentation reicht hier jeweils, es ist kein expliziter Beweis nötig.

3. Sei b_n eine gegen Null konvergente Folge reeller Zahlen. Welche zusätzliche Bedingung müsste man stellen dafür, dass es zu jedem $\ell \in \mathbb{R}$ eine Umordnung σ_ℓ gibt, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} b_{\sigma_\ell(n)} = \ell$ gilt? Eine gute Argumentation reicht.

Hinweise:

- Die Übung der Gruppe 4 (Anne Ludwig) findet am Montag, den 14.12.2009 und am Montag, den 18.1.2010 ausnahmsweise im Raum 701 im Pavillon der Humanwissenschaftlichen Fakultät (Gronewaldstr. 2a) statt.
- *Ankündigung der Fachschaft:*
  Am 11.12.09 veranstaltet die Fachschaft wieder eine große Nikolausfeier!
  Im Seminarraum des Mathematischen Instituts gibt es ab 20.00 Uhr Glühwein, Kölsch, andere Getränke und Musik. Ihr seid herzlich eingeladen, wir freuen uns auf Euch!