Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2009/10

Analysis I
Übungsblatt 9

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 17.12.2009 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. **(4 Punkte)** Welche Grenzwerte existieren? Falls sie existieren, welchen Wert haben sie?

$$a.\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2} \qquad b.\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2+x-2}$$

$$c.\ \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{6+x}-3\sqrt{x-2}} \qquad d.\ \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}-1}}{\sqrt{x}}$$

Aufgabe 2. **(3 Punkte)** Es seien die Mengen $A_1 := \{z\in\mathbb{C}; \mathrm{Re}(z)=0\}$, $A_2 := \{z\in\mathbb{C}; \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)\}$ und $A_3 := \{z\in\mathbb{C}; \mathrm{Im}(z)=0\}$ gegeben. Berechnen Sie für $i=1,2,3$

$$\lim_{\substack{z\to 0,\\ z\in A_i}}\frac{\mathrm{Re}(z)}{z}.$$

Aufgabe 3. **(3 Punkte)** Es sei $[.]$ die aus der Vorlesung bekannte Ganzzahlfunktion (Entierfunktion). Für welche $\alpha\in\mathbb{R}$ existiert

$$\lim_{x\downarrow 0} x\left[x^{-\alpha}\right]?$$

Wie lautet der Grenzwert, falls er existiert?

Aufgabe 4. **(4 Punkte)**

1. Zeigen Sie mit Hilfe der Reihenentwicklung, dass für $|x|<1$ gilt
$$|\exp(x)-1| \le \sum_{k=1}^{\infty}|x|^k = \frac{|x|}{1-|x|}.$$
2. Zeigen Sie, dass die Funktion exp stetig ist in 0.
3. Zeigen Sie, dass die Funktion exp stetig ist auf ganz $\mathbb{R}$. *Hinweis:* $\exp(x+h)-\exp(x) = \ldots$
4. Ist die Funktion exp stetig auf $\mathbb{C}$?

Aufgabe 5. **(2 Punkte)** Ist die Funktion $\mathrm{Arg}: \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ stetig?

Aufgabe 6. **(4 Punkte)** Die Funktion $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x\in\mathbb{Q}, \\ 0 & \text{falls } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

1. Gibt es eine Stelle $a\in\mathbb{R}$, an der die Funktion $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ stetig ist?
2. Wir betrachten nun $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$. Gibt es eine Stelle $a\in\mathbb{R}$, an der f stetig ist?
3. Existiert $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$?