Prof. Guido Sweers
Matthias Erven (und Jiří Horák) **SS 2007**

Analysis II
Übungsblatt 10

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 19.06.07, 10:00 Uhr besprochen.

Aufgabe 1. Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion. Geben Sie das formale Taylorpolynom dritter Ordnung an der Stelle $a=(0,0)$ an.

Aufgabe 2. Wir betrachten $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x,y)=1+(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2-8x^2-4y^4 \quad \text{und} \quad g(x,y)=e^{x^2+y^2}\left(1-x^2-y^4\right).$$

- Berechnen Sie die stationären Punkte von f bzw. g.
- Welche liefern ein Extremum?
- Welches Extremum ist global und welches lokal?

Aufgabe 3. Für welche $a,b\in\mathbb{R}$ hat $f(x,y)=x^2+axy+by^2$ ein Minimum in $(0,0)$?

Aufgabe 4. Geben Sie die Tangentialebene an den Graphen der Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $f(x,y)=\ln\left(1-x+y^2\right)$ in $(1,2)$ an.

Aufgabe 5. Berechnen Sie eine Tangentialebene an den Graphen der Funktion $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $g(x,y)=x^2+2xy+y^4$, die die Gerade $\{(t,1-t,0)\,;t\in\mathbb{R}\}$ enthält.

Aufgabe 6. * Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ eine fünfmal differenzierbare Funktion mit $\partial^\alpha f(0,0)=0$ für $\alpha\in\mathbb{N}^2$ mit $|\alpha|\le 2$.

1. Zeigen Sie: Wenn es ein $\alpha\in\mathbb{N}^2$ gibt mit $|\alpha|=3$ und $\partial^\alpha f(0,0)\neq 0$, dann hat f kein Extremum in $(0,0)$.
2. Zeigen Sie: Wenn ausserdem $\partial^\alpha f(0,0)=0$ für alle $\alpha\in\mathbb{N}^2$ mit $|\alpha|=3$ und
$$\xi_1^4\partial_1^4 f(0,0)+4\xi_1^3\xi_2\partial_1^3\partial_2 f(0,0)+6\xi_1^2\xi_2^2\partial_1^2\partial_2^2 f(0,0)+4\xi_1\xi_2^3\partial_1\partial_2^3 f(0,0)+\xi_2^4\partial_2^4 f(0,0)>0$$
für $\xi\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, dann hat die Funktion f ein Minimum in $(0,0)$.
3. Hat $f(x,y)=x\left(e^{xy^2}-1-y^2\right)$ ein Extremum in $(0,0)$? Und $f(x,y)=x\left(e^{xy^2}-1-xy^2\right)$?

---
*Anspruchsvolle Aufgabe