Prof. Guido Sweers **SS 2007**
Matthias Erven (und Jiří Horák)

Analysis II
Übungsblatt 11

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 26.06.07, 10:00 Uhr besprochen.

Aufgabe 1.

1. Geben Sie das Newtonverfahren an, eine Nullstelle von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x^2-2$ zu finden.
2. Geben Sie auch das Newtonverfahren an für $\sqrt[n]{2}$ mit $n\in\mathbb{N}$.

Aufgabe 2. Verwenden Sie das Newton-Verfahren, um die Nullstelle von $f(x)=x+e^x$ zu finden. Benutzen Sie einen (Taschen-)Rechner, um die ersten 5 Approximationen zu berechnen für $x_0=-1$.

Aufgabe 3. * Das Newton-Verfahren für $\arctan x=0$, das heißt

$$x_{i+1}=x_i-f(x_i)/f'(x_i),$$

konvergiert nur, wenn x_0 nahe bei 0 gewählt wird.

1. Zeigen Sie, dass es ein $a\in\mathbb{R}^+$ gibt derart, dass für $x_0=a$ die Folge $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ periodisch ist.
2. Zeigen Sie, dass für $x_0>a$ die Folge $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ divergiert.
3. Zeigen Sie, dass für $x_0\in(0,a)$ die Folge $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ konvergiert.
4. Geben Sie ein Verfahren an, das a approximiert.

Aufgabe 4.

1. Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\frac{1}{2}\sin(x)$ eine Kontraktion auf $\mathbb{R}$?
2. Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=2\sin(x)$ eine Kontraktion auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 5. Wir betrachten $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ mit $f(z)=2iz-z^2$.

1. Zeigen Sie, dass für $z,w\in B_{1/4}(i)$ gilt: $|f(z)-f(w)|\leq\frac{1}{2}|z-w|$.
2. Ist f eine Kontraktion auf $B_{1/4}(i)$?
3. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat.

Aufgabe 6. Wir betrachten $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ mit $f(x,y)=\left(x^2-y^2,2xy\right)$.

1. Zeigen Sie, dass es für jeden Punkt $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ eine Umgebung $B_r(a,b)$ gibt mit $f_{|B_r(a,b)}$ umkehrbar.
2. Wieso ist $f_{|B_r(0,0)}$ für kein $r>0$ umkehrbar?
3. Hat $f_{|\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ eine Inverse?

Aufgabe 7.

1. Sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z)=(yz,zx,xy)$ gegeben. Bei welchen Punkten hat f lokal **keine** Umkehrfunktion?
2. Berechnen Sie die Umkehrfunktion zu $f:(\mathbb{R}^+)^3\to(\mathbb{R}^+)^3$ mit $f(x,y,z)=(yz,zx,xy)$.

---

*Anspruchsvolle Aufgabe