

Analysis II
Übungsblatt 13

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 10.07.07, 10:00 Uhr besprochen.

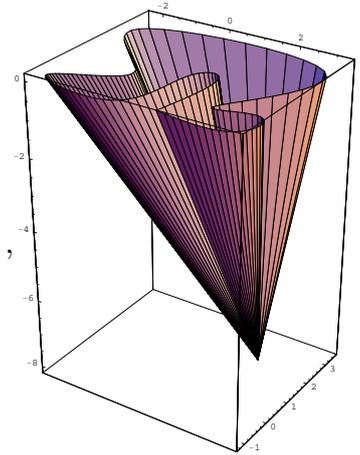
Aufgabe 1. Berechnen Sie für $A = \{(x, y); 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ das Integral

$$\int_A \sin(x^2) d(x, y).$$

Aufgabe 2. Wir betrachten die Tüte

$$T = \left\{ \theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \theta) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Omega, 0 \leq \theta \leq 1 \right\},$$

wobei $\text{Vol}_{\mathbb{R}^2}(\Omega) = 7$. Berechnen Sie $\text{Vol}_{\mathbb{R}^3}(T)$.



Aufgabe 3. Berechnen Sie das Volumen von $P = \{(x, y, z, t); 0 \leq x \leq y \leq z \leq t \leq 1\}$.

Aufgabe 4. Berechnen Sie für $B = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| \leq 1\}$ das Integral $\int_B x_3^2 dx$.

Aufgabe 5.

1. Erklären Sie, wieso für $Q_R = \{x \in \mathbb{R}^2; |x_1| \leq R \text{ und } |x_2| \leq R\}$ gilt, dass

$$\left(\int_{-R}^R e^{-t^2} dt \right)^2 = \int_{Q_R} e^{-\|x\|^2} dx.$$

2. Berechnen Sie für $B_R = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| \leq R\}$ das Integral

$$\int_{B_R} e^{-\|x\|^2} dx.$$

Hinweis: Polarkoordinaten.

3. Zeigen Sie, dass

$$\int_{B_R} e^{-\|x\|^2} dx \leq \int_{Q_R} e^{-\|x\|^2} dx \leq \int_{B_{\sqrt{2}R}} e^{-\|x\|^2} dx.$$

4. Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Aufgabe 6. Welches Volumen hat der Durchschnitt der Zylinder

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ und } \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + z^2 \leq 1\}?$$