Prof. Guido Sweers **SS 2007**
Matthias Erven (und Jiří Horák)

Analysis II
Übungsblatt 3

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 24.04.07, 10:00 Uhr besprochen.

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Lösungen zu

1. $x'(t) = 5x(t) + \sin t$;
2. $y'(t) = 2y(t) + e^{-2t}$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie:

1. die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;
2. die zugehörigen Eigenvektoren;
3. $\exp\left(t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$;
4. die Lösungen von $\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) + x_2(t) + \sin t \\ x_1(t) - x_2(t) \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ zwei stetige Funktionen. Nehmen wir an:

- $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ist eine Lösung von $x'(t) = Ax(t) + f(t)$ und
- $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $y'(t) = Ay(t) + g(t)$.

Zeigen Sie, dass $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $z(t) = c_1x(t) + c_2y(t)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist von

$$z'(t) = Az(t) + c_1 f(t) + c_2 g(t).$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Lösungen $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ zu

a) $x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} x(t)$ b) $y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} y(t)$

Aufgabe 5. Seien $A, B \in M^{n\times n}(\mathbb{C})$. Zeigen Sie:

$$\exp(tA + sB) = \exp(tA)\exp(sB) \text{ für alle } t, s \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$AB = BA$$

Hinweis: Setzen Sie $s = t$ und leiten Sie zweimal nach t ab!

(bitte wenden)

Aufgabe 6. Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(t,d) := (1-d)\,e^{t\cdot d}$$

1. In welchen Bereichen der t-d-Ebene ist f positiv, wo negativ? Machen Sie eine Skizze.

2. Betrachten wir nun die Differentialgleichung

$$d'(t) = f(t, d(t))$$

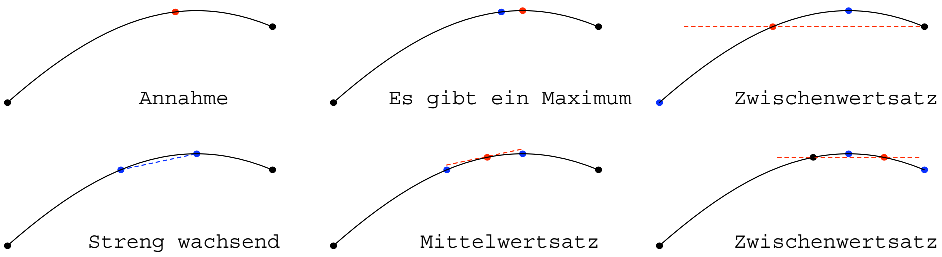
für $t \in [0,\infty)$. Skizzieren Sie, wie die Lösungen der Differentialgleichung für die Anfangswerte $d_1(0) = 0$, $d_2(0) = 1$ und $d_3(0) = 2$ ihrer Meinung nach verlaufen (keine Berechnung erforderlich!).

3. Beweisen Sie: Ist $d_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ Lösung obiger Differentialgleichung zum Anfangswert $d_2(0) = 1$, so ist $d_2(t) = 1$ konstant für alle $t \in [0,\infty)$.

Aufgabe 7. * Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass jede Lösung $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ von

$$u'(x) = F(u(x))$$

eine monotone Funktion ist.
Zum Hinweis folgendes Bild:



* Anspruchsvolle Aufgabe