Prof. Guido Sweers
Matthias Erven (und Jiří Horák)

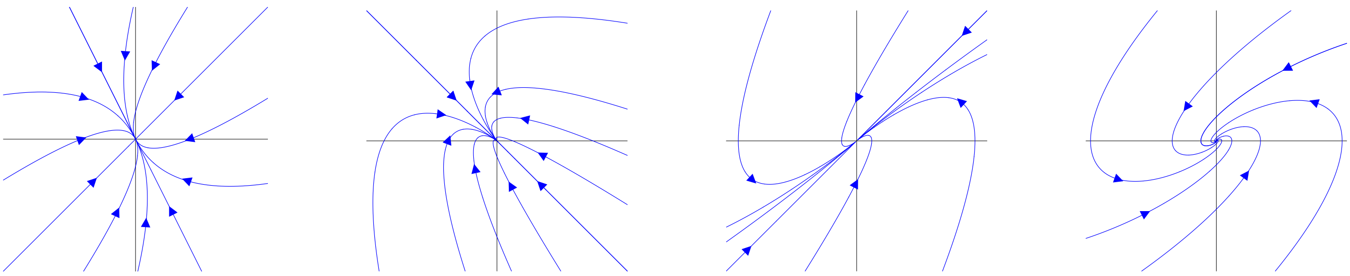
SS 2007

Analysis II
Übungsblatt 4

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 02.05.07, 10:00 Uhr besprochen.

Aufgabe 1. Welches Bild gehört zu

1. Lösungen von $x'(t) = Ax(t)$, wobei $A \in M^{2\times 2}(\mathbb{R})$ nur einen unabhängigen Eigenvektor hat und der Eigenwert -1 ist.
2. Lösungen von $x'(t) = Ax(t)$, wobei $A \in M^{2\times 2}(\mathbb{R})$ zwei Eigenwerte hat und $\lambda_1 = -1+i$.
3. Lösungen von $x'(t) = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} x(t)$.
4. Lösungen von $x'(t) = A(x(t))$, wobei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nicht linear ist.



I II III IV

Aufgabe 2. Was kann man über die Stabilität von $x'(t) = Ax(t)$ sagen?

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3. Wir betrachten das System $x'(t) = Ax(t)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

1. Geben Sie ein Paar $a, b \in \mathbb{R}$ an derart, dass das System neutral stabil ist.
2. Geben Sie ein Paar $a, b \in \mathbb{R}$ an derart, dass das System einen stabilen Strudel liefert.
3. Geben Sie ein Paar $a, b \in \mathbb{R}$ an derart, dass das System einen Sattelpunkt liefert.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen zu:

1. $a''(s) + a(s) = e^s$;
2. $v''(y) + v(y) = y\sin(y)$;
3. $u''''(x) + 4u''(x) + 4u(x) = \sin(x)$.

(bitte wenden)

Aufgabe 5. Sei $A \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$. Seien darüberhinaus $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ein Eigenwert von A und φ ein zugehöriger Eigenvektor.

1. Zeigen Sie, dass $\overline{\lambda}$ ein weiterer Eigenwert von A ist mit Eigenvektor $\overline{\varphi}$.
2. Beweisen Sie, dass gilt:
$$\begin{aligned} A\,\mathrm{Re}\,\varphi &= (\mathrm{Re}\,\lambda)\,\mathrm{Re}\,\varphi - (\mathrm{Im}\,\lambda)\,\mathrm{Im}\,\varphi, \\ A\,\mathrm{Im}\,\varphi &= (\mathrm{Im}\,\lambda)\,\mathrm{Re}\,\varphi + (\mathrm{Re}\,\lambda)\,\mathrm{Im}\,\varphi. \end{aligned}$$
3. Zeigen Sie, dass $\{\mathrm{Re}\,\varphi, \mathrm{Im}\,\varphi\}$ (linear) unabhängig sind.
4. Verwenden Sie dieses Ergebnis, um ein $T \in M^{2\times 2}(\mathbb{R})$ zu finden derart, dass
$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} T^{-1}.$$
5. Berechnen Sie $\exp\left(t\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right)$. Hinweis: $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Der hier gezeigte Weg liefert eine alternative Methode, $\exp\left(t\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right)$ zu berechnen, ohne viel mit komplexen Zahlen rechnen zu müssen. Dies funktioniert allgemein bei komplexen Eigenwerten.

Aufgabe 6. Sei $A \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$. Wir definieren für $t \in \mathbb{R}$
$$\sin(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(At)^{2k+1} \text{ und } \cos(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(At)^{2k}$$

1. Wieso sind $\sin(At)$ und $\cos(At)$ in $M^{n\times n}(\mathbb{R})$ wohldefiniert?
2. Raten Sie die formalen Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ für
$$x''(t) + A^2 x(t) = 0. \tag{1}$$
3. Sei x eine Lösung von (1). Zeigen Sie, dass dann $y = \begin{pmatrix} Ax \\ x' \end{pmatrix}$ folgendes Differentialgleichungssystem erster Ordnung erfüllt:
$$y' = By.$$
Wie muss B dabei gewählt werden?
4. Zeigen Sie
$$e^{tB} = \begin{pmatrix} \cos(At) & \sin(At) \\ -\sin(At) & \cos(At) \end{pmatrix}.$$
5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion und $x_0, v_0 \in \mathbb{R}^n$. Geben Sie eine Lösungsformel an für
$$\begin{cases} x''(t) + A^2 x(t) = f(t) \text{ für } t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = v_0. \end{cases}$$