Prof. Guido Sweers **SS 2007**
Matthias Erven (und Jiří Horák)

Analysis II
Übungsblatt 6

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 15.05.07, 10:00 Uhr besprochen.

Aufgabe 1. Welche der folgenden Mengen in $\mathbb{R}^2$ sind offen, welche abgeschlossen? Beweisen Sie Ihre Aussage.

1. $\left\{x \in \mathbb{R}^2 ; \|x\| > 1\right\}$;
2. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} B_{1/n}(n,0)$;
3. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} \overline{B_{1/n}(n,0)}$;
4. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} B_{\frac{n+1}{n}}(0,0)$;
5. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} B_{\frac{n}{n+1}}(0,0)$.

Aufgabe 2. Sei $A = \{(x,y)\,; x \in \mathbb{R}^+ \text{ und } |y| \leq \left(\sin\frac{1}{x}\right)^2\}$. Geben Sie A^o, ∂A, $\bar{A}$, A^{HP} und A^{IP} an.

Aufgabe 3. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

1. B^o ist die größte offene Teilmenge von B, genauer: $B^o = \bigcup \{A; A \subset B \text{ und } A \text{ offen}\}$
2. $\bar{B}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die B enthält, genauer: $\bar{B} = \bigcap \{A; A \supset B \text{ und } A \text{ abgeschlossen}\}$

Aufgabe 4. An welchen Stellen sind folgende Funktionen stetig?

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$;
2. $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{Arg}(x+iy)\right)$;
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = \operatorname{sign}(x)y^2$, wobei
$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x > 0; \end{cases}$$
4. $k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit
$$k(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{für } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Aufgabe 5. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine derartige Funktion, dass gilt:

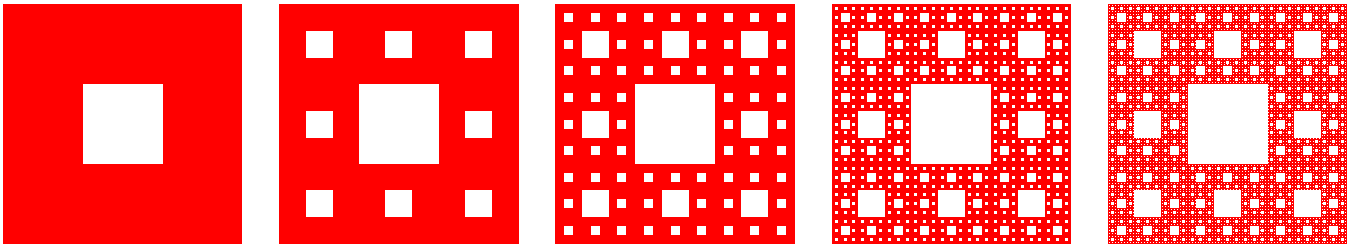
i. $x \mapsto f(x,y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in $x = a$ gleichmäßig stetig bezüglich y:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x,y) - f(a,y)| < \varepsilon.$$

ii. $y \mapsto f(x,y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in $y = b$ gleichmäßig stetig bezüglich x:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y-b| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x,y) - f(x,b)| < \varepsilon.$$

1. Zeigen Sie, dass f stetig ist in (a,b).
2. Gilt dies auch, wenn statt i die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ nur stetig und nicht gleichmäßig stetig ist?
3. Gilt dies auch, wenn statt i und ii sowohl $x \mapsto f(x,y)$ als auch $y \mapsto f(a,y)$ nur stetig und nicht gleichmäßig stetig sind?

Aufgabe 6. * Wir betrachten die abgeschlossenen Teilmengen A_i vom Quadrat $[0,1] \times [0,1]$, die entstehen, indem man das Quadrat in neun gleich große Quadrate zerlegt und dann das Innere des mittleren Quadrates entfernt. Danach wiederholt man die gleiche Prozedur auf den übriggebliebenen Teilquadraten usw. Hier stehen Bilder zu A_1, A_2, A_3, A_4 und A_5:



Formal geht es wie folgt: Man setzt $K = \{(x,y)\,; 0 < x < 1 \text{ und } 0 < y < 1\}$ und für $a,b,r \in \mathbb{R}$:

$$K(a,b,r) = (a,b) + rK = \{(a+rx, b+ry)\,; (x,y) \in K\},$$

und anschließend:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \overline{K}, \\
A_1 &= A_0 \backslash K\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \\
A_2 &= A_1 \backslash \bigcup_{\substack{0 \le m \le 2 \\ 0 \le k \le 2}} K\left(\frac{1}{3^2} + \frac{m}{3}, \frac{1}{3^2} + \frac{k}{3}, \frac{1}{3^2}\right), \\
A_3 &= A_2 \backslash \bigcup_{\substack{0 \le m \le 8 \\ 0 \le k \le 8}} K\left(\frac{1}{3^3} + \frac{m}{3^2}, \frac{1}{3^3} + \frac{k}{3^2}, \frac{1}{3^3}\right), \\
&\;\;\dots \\
A_{n+1} &= A_n \backslash \bigcup_{\substack{0 \le m \le 3^n - 1 \\ 0 \le k \le 3^n - 1}} K\left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{m}{3^n}, \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{k}{3^n}, \frac{1}{3^{n+1}}\right).
\end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass $A_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ abgeschlossen ist und dass $\partial(A_\infty) = A_\infty$.

Wir setzen $B_n(x) = \{y \in \mathbb{R}; (x,y) \in A_n\} \subset \mathbb{R}$.

2. Was können Sie sagen über $B_n = B_n\left(\frac{4}{27}\right)$ und $B_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$?
3. Was können Sie sagen über $B_n = B_n\left(\frac{1}{6}\right)$ und $B_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$?
4. Gilt $\left(\frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right) \in A_\infty$?

---

*Anspruchsvolle Aufgabe