Prof. Guido Sweers
Matthias Erven (und Jiří Horák) **SS 2007**

Analysis II
Übungsblatt 7

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 22.05.07, 10:00 Uhr besprochen.

Aufgabe 1. Beweisen Sie:

1. $\|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$ für alle $x, y \in \ell_1$
2. $\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ für alle $x, y \in \ell_\infty$

Aufgabe 2. Für $x \in \mathbb{R}^2$ setze $\|x\|_* = \sqrt{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}$. Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ derart, dass

$$c_1 \|x\|_* \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_* \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 3. Es gilt, dass $\|x\|_3 = \sqrt[3]{|x_1|^3 + |x_2|^3}$ eine Norm ist für $\mathbb{R}^2$.[1]

2. Skizzieren Sie die zugehörige Einheitskugel $\left\{x \in \mathbb{R}^2; \|x\|_3 < 1\right\}$.

Man definiert für $p \in [1, \infty)$ die Norm $\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}$ auf $\mathbb{R}^2$. Sei im Folgenden $x \in \mathbb{R}^2$.

3. Zeigen Sie, dass $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(p) = \|x\|_p$ eine monoton fallende Funktion ist.
4. Zeigen Sie, dass $\|x\|_1 \geq \|x\|_p \geq \|x\|_\infty$ gilt für $p \in [1, \infty)$.
5. Berechnen Sie $\lim\limits_{p \to \infty} \|x\|_p$.

Aufgabe 4.

1. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x, y) = x\left(3 - 2x + x^2 + y^2\right)(x - y)\left(2 - x^2 - 3y^2\right).$$
   (a) Berechnen und skizzieren Sie die Menge aller Punkte (x, y) mit $f(x, y) = 0$!
   (b) Von wie vielen Maxima und Minima von f können Sie die Existenz beweisen?
   Hinweis: Betrachten Sie die Komponenten von $\{(x, y); f(x, y) \neq 0\}$.
2. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x, y) = xy(1 - x - y)\left(3 - x^2 - 2y^2\right) e^{-x^2 - y^2}.$$
   Von wie vielen Maxima und Minima können Sie die Existenz beweisen?
   Hinweis: Was passiert für $\|(x, y)\| \to \infty$?

(bitte wenden)

[1] Wer möchte, kann versuchen, dieses zu beweisen.

Aufgabe 5. Man definiert:

i. $c := \left\{ (x_1, x_2, \dots);\ x_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \text{ und } \lim_{i\to\infty} x_i \text{ existiert} \right\}$,

ii. $c_0 := \left\{ (x_1, x_2, \dots);\ x_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \text{ und } \lim_{i\to\infty} x_i = 0 \right\}$,

iii. $c_{00} := \{ (x_1, x_2, \dots);\ x_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \text{ und es gibt ein } i_0 \text{ mit } x_i = 0 \text{ für alle } i \geq i_0 \}$.

1. Zeigen Sie, dass $(c, +, \mathbb{R}, \cdot, \|.\|_\infty)$ ein normierter Vektorraum ist. Gilt das auch, wenn man c ersetzt durch c_0 oder c_{00}?

2. Seien V_1 und V_2 normierte Vektorräume aus $(c, \|.\|_\infty)$, $(c_0, \|.\|_\infty)$, $(c_{00}, \|.\|_\infty)$, $(\ell_1, \|.\|_1)$, $(\ell_2, \|.\|_2)$ und $(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$. Für welche Paare V_1, V_2 gilt: $x \in V_1 \Rightarrow x \in V_2$?

3. Für welche Paare $V_1 \subset V_2$ gibt es eine Konstante $\gamma > 0$ derart, dass für alle $x \in V_1$ gilt

$$\|x\|_{V_1} \geq \gamma \|x\|_{V_2}?$$