Prof. Guido Sweers **SS 2007**
Matthias Erven (und Jiří Horák)

Analysis II
Übungsblatt 8

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 05.06.07, 10:00 Uhr besprochen.

Aufgabe 1. Welche der folgenden Mengen sind zusammenhängend/wegzusammenhängend?

1. in $\mathbb{R}^2$: $A = B_1(-1,0) \cup B_1(1,0)$
2. in $\mathbb{R}^2$: $A = B_1(-1,0) \cup \overline{B_1(1,0)}$
3. in $\mathbb{R}^2$: $A = \{(x,y)\,; xy = 1\}$
4. in $\mathbb{R}^3$: $A = \{(x,y,z)\,; xyz = 1\}$
5. in $\mathbb{R}$: Sei $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$ und setze $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (q_n - 2^{-n}, q_n + 2^{-n})$

Aufgabe 2. Berechnen Sie

1. für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1,x_2) = e^{x_1 \sin x_2}$ die Ableitungen $\partial_1 f(1,\pi)$, $\partial_1\partial_2 f(1,\pi)$ und $\partial_1\partial_2\partial_1 f(1,\pi)$.
2. für $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit
$$g(x,y) = \begin{cases} x^y & \text{für } x \geq 0 \\ -|x|^y & \text{für } x < 0 \end{cases}$$
die Ableitungen $\partial_1 g$ und $\partial_2 g$ überall, wo sie existieren.
3. für $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit
$$h(r,\varphi,\theta) = (r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta))$$
die Jacobimatrix in (r,φ,θ).

Aufgabe 3. Geben Sie jeweils ein Beispiel an für

- eine stetige Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit beschränktem I, die kein Extremum hat.
- eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die kein Extremum hat.
- eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die unendlich viele lokale Minima hat.
- eine offene Überdeckung von $(0,1)$, aus der sich keine endliche Teilüberdeckung auswählen lässt.

(bitte wenden)

Aufgabe 4. Wir betrachten die Folge

$$x^1 = (2,0,0,0,\dots)\,,\; x^2 = (0,2,0,0,\dots)\,,\; x^3 = (0,0,2,0,\dots)\dots,$$

das heißt $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ mit $x_l^k = 2\delta_{kl}$ (dieses sogenannte Kronecker-Delta ist definiert durch $\delta_{kl} = 0$ für $k \neq l$ und $\delta_{kl} = 1$ für $k = l$) in $(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$.

1. Zeigen Sie, dass diese Folge beschränkt ist.
2. Hat diese Folge eine konvergente Teilfolge?
3. Ist $K := \{x \in \ell_\infty; \|x\|_\infty \leq 2\}$ in $(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$ folgenkompakt?
4. Sei $I := \{y \in \ell_\infty; y_i \in \{-2,2\}$ für alle $i \in \mathbb{N}^+\}$. Zeigen Sie, dass $\{B_3(y); y \in I\}$ die Menge K überdeckt.
5. Kann man aus $\{B_3(y); y \in I\}$ eine endliche Teilmenge wählen, die K überdeckt?

Aufgabe 5. Man definiert

$$c_0 := \left\{(x_1, x_2, \dots)\,;\; x_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \text{ und } \lim_{i\to\infty} x_i = 0\right\}.$$

$(c_0, +, \mathbb{R}, ., \|.\|_\infty)$ ist ein normierter Vektorraum.
Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und sei

$$A = \{x \in c_0;\; |x_i| \leq 1 \text{ für } i \leq n \text{ und } x_i = 0 \text{ für } i > n\}\,.$$

1. Zeigen Sie: A ist folgenkompakt.
2. *Zeigen Sie: A ist kompakt.
3. *Sei $B = \left\{x \in c_0;\; |x_i| \leq \frac{1}{i} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}^+\right\}$. Ist B (folgen)kompakt?

---

*Anspruchsvolle Aufgabe