Prof. Guido Sweers **SS 2007**
Matthias Erven (und Jiří Horák)

Analysis II
Übungsblatt 9

Diese Hausaufgaben werden in den Übungen in der Woche ab 12.06.07, 10:00 Uhr besprochen.

Aufgabe 1. Wir betrachten $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

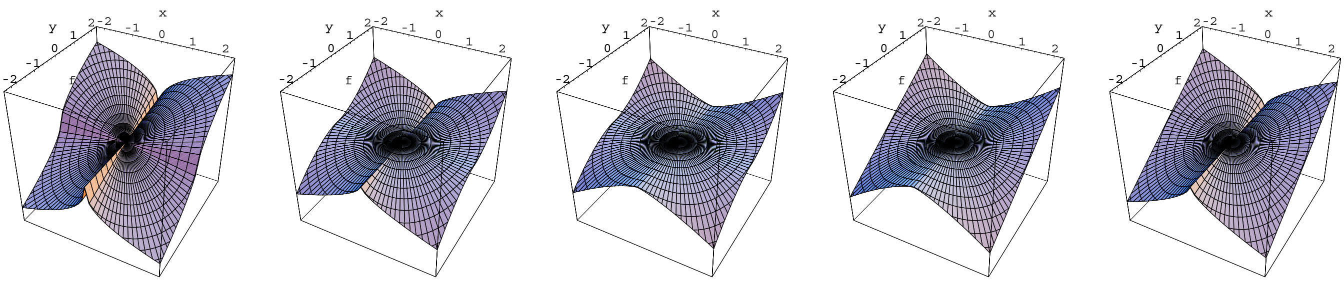
$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\|(x,y)\|^\alpha} \text{ für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 \quad \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Baestimmen Sie diejenigen $\alpha \in \mathbb{R}$, für die gilt:

1. f_α ist stetig auf $\mathbb{R}^2$.
2. f_α hat partielle Ableitungen auf $\mathbb{R}^2$.
3. f_α hat stetige partielle Ableitungen auf $\mathbb{R}^2$.
4. f_α ist differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$.
5. f_α ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2. Fünf Funktionen $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f_1(x,y) = y\sqrt[3]{x^4},\ f_2(x,y) = y\sqrt[3]{x^2},\ f_3(x,y) = \sqrt[3]{x^4y^5},\ f_4(x,y) = \sqrt[5]{x^2y^3},\ f_5(x,y) = \sqrt[3]{x^2y^5}.$$



1. Welche Skizze gehört zu welcher Funktion?
2. Welche dieser Funktionen sind partiell differenzierbar in $(0,0)$?
3. Für welche dieser Funktionen existiert $\partial_u f_i(0,0)$ mit $u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$?
4. Welche dieser Funktionen sind differenzierbar in $(0,0)$?

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Schreiben Sie aus:

1. $\frac{\partial}{\partial x}\left(f(ye^x, xe^y)\right);$
2. $\frac{\partial}{\partial x}\left(x f(x,x^2)\right);$
3. $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(f(x, f(x,y))\right).$

(bitte wenden)

Aufgabe 4. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nennt man homogen vom Grad $p > 0$, wenn $f(tx) = t^p f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$ gilt. Zeigen Sie, dass folgendes gilt, wenn f außerdem differenzierbar ist:

$$x \cdot (\nabla f)(x) = p\ f(x)\,.$$

Aufgabe 5. Wir definieren $S : \ell_2 \to \ell_2$ durch

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)\,,$$

das heißt $(S(x))_k = x_{k+1}$ und betrachten $f : \ell_2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \|x\|^2 - x_1 - x \cdot S(x),$$

wobei für $x, y \in \ell_2$ der Ausdruck $x \cdot y$ durch

$$x \cdot y := \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

(wohl)definiert ist. Zeigen Sie:

1. $x \cdot S(x) \leq \|x\|^2 - \frac{1}{2} x_1^2$ f ür alle $x \in \ell_2$.
2. $f(x) \geq -\frac{1}{2}$ für alle $x \in \ell_2$.
3. für jedes $x \in \ell_2$ gibt es $\theta_x < 1$ mit $x \cdot S(x) \leq \theta_x \|x\|^2$.
4. $\lim\limits_{t \to \infty} f(tx) = \infty$ für alle $x \in \ell_2 \setminus \{0\}$.
5. $\inf\{f(x); x \in \ell_2\} = -\frac{1}{2}$; Geben Sie eine minimalisierende Folge an.

Hat f ein Minimum?