Aufgaben der Klausur vom 24. Juli 2010
Prüfungsstoff: Analysis I + Analysis II

1. Die Zahl $z = -1$ ist eine Lösung von $z^5 + z^4 + z + 1 = 0$. Berechnen Sie die übrigen Lösungen.

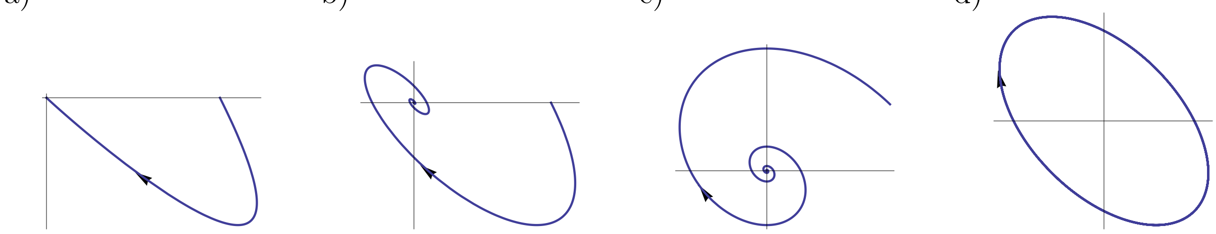
2. Berechnen Sie
$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}dx,$$
oder zeigen Sie, dass dieses Integral nicht existiert.

3. Ist $\{x \in \mathbb{R}; x^2 \in \mathbb{Q}\}$ abzählbar?

4. (a) Gibt es eine Folge $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ komplexer Zahlen, so dass die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ für $z = 2$ konvergiert und für $z = 1 + i$ divergiert?
   (b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{3^n} z^{n!}$?

5. Geben Sie jeweils das maximale Definitionsgebiet in $\mathbb{R}$ an und skizzieren Sie den Graphen:
   (a) $f(x) = \sin(\arcsin(x))$;
   (b) $g(x) = \arcsin(\sin x)$.

6. a) b) c) d)



Wir betrachten das System $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ für:

I. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 1 + 2i$ und $\lambda_2 = \ldots\ldots\ldots$
Die zugehörige Skizze ist ...
Die Klassifizierung ist ....

II. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = i\sqrt{3}$ und $\lambda_2 = \ldots\ldots\ldots$
Die zugehörige Skizze ist ...
Die Klassifizierung ist ....

III. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = \frac{1}{2}i\sqrt{7} - \frac{1}{2}$ und $\lambda_2 = \ldots\ldots\ldots$
Die zugehörige Skizze ist ...
Die Klassifizierung ist ....

IV. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = \ldots\ldots\ldots$
Die zugehörige Skizze ist ...
Die Klassifizierung ist ....

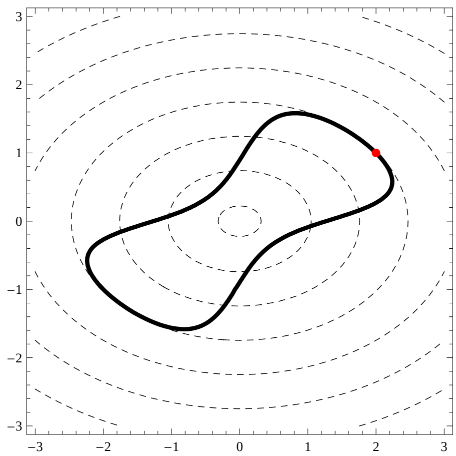
Ergänzen Sie die Lücken im Text.

Mit „Klassifizierung“ ist gemeint: stabiler Knoten, instabiler Strudel, ...

7. Sei $A = \{(x,y)\,;x^2+2y^2+xy+e^{2-xy}=9\}$, und sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y)=x^2+2y^2.$$

Wir behaupten, dass die Funktion $f:A\to\mathbb{R}$ ihr Maximum annimmt in $(2,1)$. Was sagt der Multiplikator-Satz von Lagrange zu dieser Aussage?
Im Bild ist A dargestellt als durchgezogene Kurve, und die gestrichelten Kurven sind Niveaulinien von f.



8. Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung um $(\pi,1)$ von

$$f(x,y)=\sin(xy)\,.$$

9. Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0,1)=2$, und sei $g(x,y)=xf(x,y)$.

   (a) Berechnen Sie $\frac{\partial g}{\partial x}(0,1)$ und $\frac{\partial g}{\partial y}(0,1)$.

   Sei nun $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0,1)=2$, und sei $g(x,y)=xf(x,y)$.

   (b) Existieren $\frac{\partial g}{\partial x}(0,1)$ und $\frac{\partial g}{\partial y}(0,1)$?

   (c) Ist g differenzierbar in $(0,1)$?

10. Wir betrachten

$$f(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2+2}.$$

   (a) Zeigen Sie $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y)=0$.

   (b) Beweisen Sie, dass $\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ und $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ existieren.

   (c) Berechnen Sie die Stellen, wo die Funktion f ihr Minimum bzw. ihr Maximum annimmt.