Aufgaben der Nachklausur vom 27.9.2010
Prüfungsstoff: Analysis I + Analysis II

1. Wir betrachten $f(x) = \arcsin(x)$.

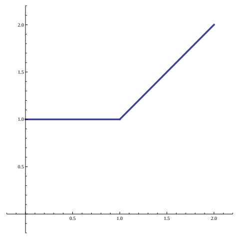
   (a) Geben Sie Definitionsgebiet und Bildmenge an und skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

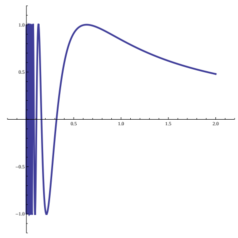
   (b) Zeigen Sie, dass $f'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ für $x \in (-1,1)$.

   (c) Berechnen Sie eine explizite Stammfunktion für f.

2. (a) Berechnen Sie $\int_0^2 \max(1,x)\,dx$.

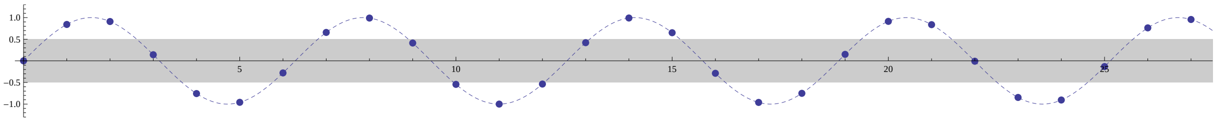
   (b) Existiert $\int_0^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$ als uneigentliches Riemann-Integral? Beweisen Sie Ihre Antwort.





3. Berechnen Sie $\int_0^\pi e^x \sin(x)\,dx$.

4. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$ konvergent beziehungsweise divergent? Beweisen Sie Ihre Antwort.



In der Skizze sind die Punkte $\{(n,\sin(n))\,;n \in \mathbb{N}\}$ *dargestellt.*

5. (a) Wie lautet der Satz von Bolzano-Weierstraß?

   (b) Hat $\left\{e^{in!}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine konvergente Teilfolge? Beweisen Sie Ihre Antwort.

6. Wir betrachten $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} = \{x+iy; x,y \in \mathbb{Q}\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ abzählbar ist.

   (b) Sei $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$. Ist $\mathcal{U} := \left\{B_{\frac{1}{n}}(z_n)\right\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ eine (offene) Überdeckung von $\mathbb{C}$?
   Hinweis: $B_\varepsilon(z_*) = \{z \in \mathbb{C}; |z-z_*| < \varepsilon\}$.

7. Unten sehen Sie die Skizze einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die folgende Bedingung erfüllt:

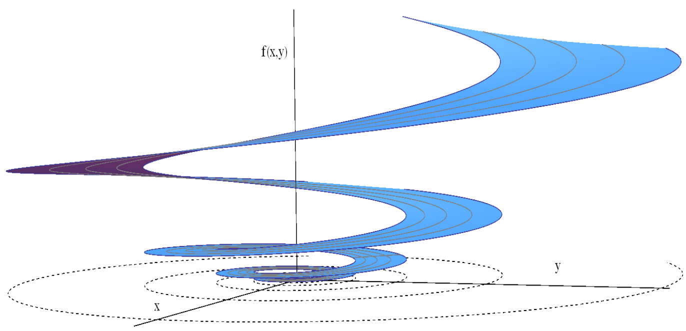
$$0 \le f(x,y) \le x^2 + y^2 \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   Wählen und begründen Sie die richtige Aussage:

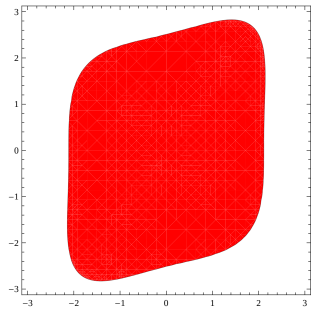
   i. f ist differenzierbar in $(0,0)$;

   ii. f ist nicht differenzierbar in $(0,0)$;

   iii. Die Voraussetzungen reichen nicht aus, um Differenzierbarkeit zu beweisen oder zu widerlegen.



8. Berechnen Sie den Punkt



$$(x_0, y_0) \in \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x^4 - xy^3 + y^4 \leq 40\right\},$$

an dem y_0 maximal wird.

9. Berechnen Sie alle Lösungen y von

$$y''''(t) + 2y''(t) + y(t) = te^t.$$

10. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = e^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(1 - 4yz - 3z^2\right).$$

Das Taylorpolynom zu f von Ordnung 2 um $(0, 0, 0)$ ist

$$t_{2,(0,0,0)}(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - 4yz - 3z^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(0, 0, 0)$ ein stationärer Punkt ist.

(b) Zeigen Sie, dass auch $\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ ein stationärer Punkt ist und berechnen Sie den dritten stationären Punkt.

(c) Hat f ein Maximum in $(0, 0, 0)$? Beweisen Sie Ihre Antwort.